

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский Физико - Технический Институт
(Государственный Университет)

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра.

Рефрижератор растворения для исследования
поверхности кристаллов He^4 .

Студент 422 гр. Данилин С.И.
Научный руководитель:
д. ф. м. н., член-корр. РАН Паршин А.Я.

Москва, 2008 г.

Содержание

1	Введение	1
2	Физические основы метода	2
3	Основные узлы рефрижератора растворения	6
4	Оценка минимальной температуры	12

1 Введение

Рефрижераторы растворения He^3 в He^4 являются наиболее часто используемыми машинами для получения температур существенно ниже 0,3 К. Рефрижератор этого типа позволяет работать в непрерывном режиме, поддерживая низкую температуру в течение многих часов, способен поглощать довольно большие количества тепла, а также даёт возможность регулировать температуру.

Рефрижератор растворения, собираемый в нашей лаборатории, нужен для получения температур порядка $20 \sim 30$ мК, и будет использоваться в экспериментах по исследованию динамики поверхности кристаллов He^4 . Первым из экспериментов на этой установке будет измерение коэффициента прохождения акустической волны большой амплитуды через границу раздела твёрдой и жидкой фаз He^4 .

В работе рассматриваются основные принципы устройства и работы рефрижератора растворения. Основываясь на работах [1], [4] и [5], с использованием необходимых параметров собираемой установки даётся оценка температуры в камере растворения машины.

2 Физические основы метода

Метод получения низких температур, использующий растворы $He^3 - He^4$, основывается на том обстоятельстве, что энтальпия раствора, рассчитанная на один моль He^3 в растворе, увеличивается при уменьшении концентрации He^3 . Если разбавление производить в адиабатических условиях, то при этом будет происходить понижение температуры. На рис. 1 приведена диаграмма состояния растворов He^3 в He^4

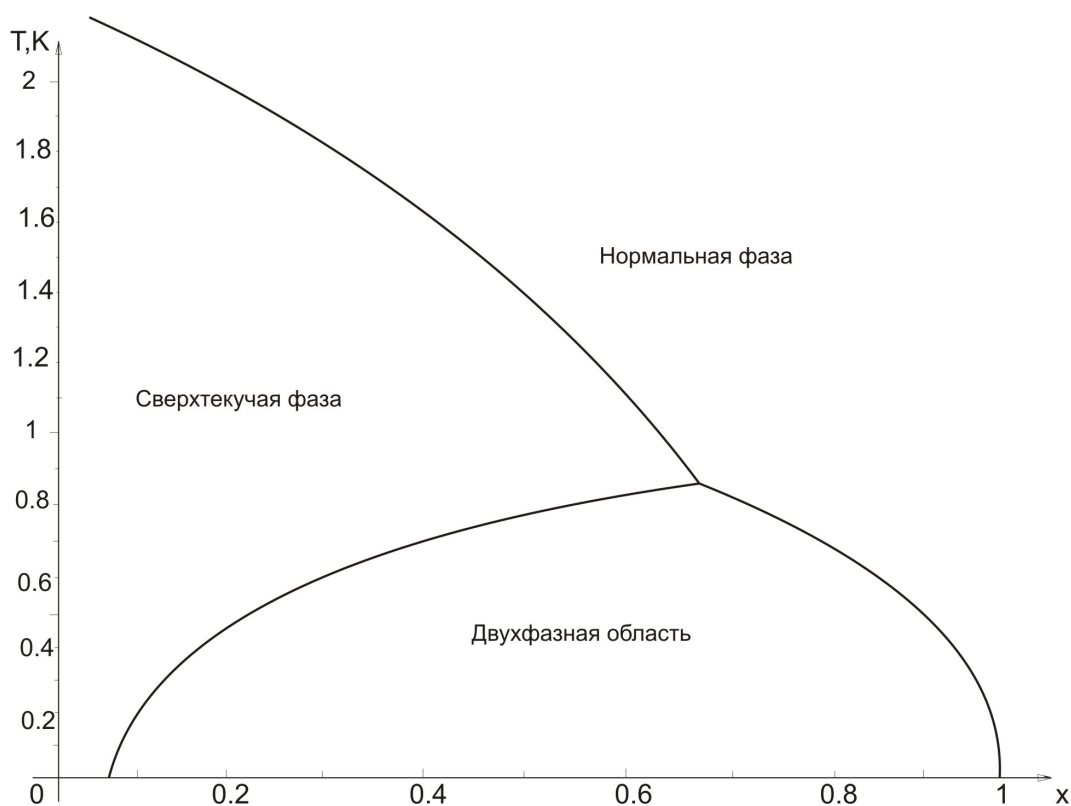


Рис. 1: Фазовая диаграмма смесей He^3 и He^4 . $x = n_3/(n_3 + n_4)$ — концентрация He^3

При температурах, больших 0,86 К, He^3 растворим в He^4 в любых пропорциях, а при температурах ниже 0,86 К происходит расслоение раствора на богатую He^3 фазу и слабый раствор He^3 в He^4 . После расслоения фаза, богатая более лёгким He^3 , находится над слабым раствором He^3 в He^4 . Такое расслоение

позволяет He^3 совершать переход между растворами, концентрации которых сильно отличаются, что обуславливает большую холодопроизводительность процесса. Так например, если имеется объём, заполненный расслоившимся раствором, то при удалении He^3 из нижней фазы, для того чтобы сохранилось равновесие, некоторое количество He^3 должно будет из верхней фазы перейти в нижнюю, что будет сопровождаться поглощением тепла, количество которого в изотермических условиях определится выражением

$$\dot{Q} = \dot{n}_3[W_3(x_l, T) - W_3(x_u, T)] = T\dot{n}_3[S_3(x_l) - S_3(x_u)], \quad (1)$$

где \dot{n}_3 - скорость циркуляции He^3 в системе, $W_3(x_l, T)$ и $W_3(x_u, T)$ - энтальпия раствора в расчёте на один моль He^3 при температуре T и концентрациях x_l (нижняя фаза) и x_u (верхняя фаза) соответственно, а $S_3(x_l)$ и $S_3(x_u)$ - молярная энтропия He^3 в растворе концентрации x_l и x_u . Переход атомов He^3 из концентрированной фазы в слабый раствор эквивалентен процессу испарения. Удаляемый из нижней фазы He^3 можно подавать в верхнюю фазу и вновь удалять его из нижней фазы и т.д., реализуя таким образом непрерывный цикл.

На рис.2 условно показана диаграмма состояния растворов $He^3 - He^4$, отражающая расслоение растворов и равновесие жидкость - пар(линии со стрелками характеризуют изменение концентрации He^3 на различных этапах его циркуляции).

В правой части рисунка схематически изображены основные низкотемпературные узлы рефрижератора: камера растворения М, основной низкотемпературный теплообменник Н, камера испарения S, температура которой предполагается равной 0,6 К и в которой поддерживается давление $\sim 5 * 10^{-2}$ Торр.

В стационарных условиях камера растворения, имеющая температуру T_m , например 0,01 К, заполнена расслоившимся раствором, причём верхняя фаза - практически чистый He^3 (точка В диаграммы), а нижняя - раствор с содержанием $He^3 \sim 6,4\%$ (точка D диаграммы). Камера испарения, соединённая с нижней частью

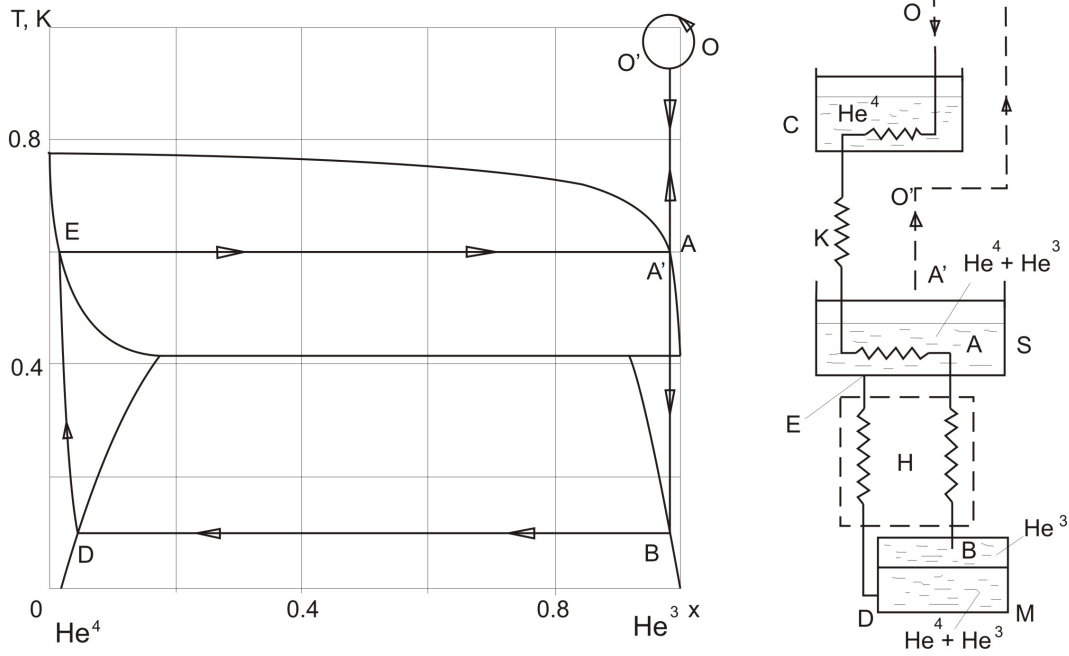


Рис. 2: Принципиальная схема рефрижератора растворения и диаграмма состояния растворов $He^3 - He^4$ (изображена условно).

камеры растворения, заполнена слабоконцентрированным раствором He^3 (точка E диаграммы), причём поскольку температура в камере испарения значительно выше T_m , то концентрация раствора в ней не совпадает с концентрацией нижней фазы в камере растворения (явление термоосмоса).

Как меняется концентрация He^3 в растворе на участке DE диаграммы, можно приближённо подсчитать при помощи следующих соображений. Условие равновесия в разбавленной сверхтекучей фазе по сверхтекучей компоненте

$$\mu_4(x, T, P) = const \quad (2)$$

где $\mu_4(x, T, P)$ - химический потенциал He^4 в растворе концентрации x при температуре T и давлении P , равный

$$\mu_4(x, T, P \sim 0) = \mu_4(0) + \int_0^P \left[\frac{\partial \mu_4}{\partial P} \right]_{T,x} dP - \int_0^T s_4 dT - \int_0^x \frac{t}{1-t} \left[\frac{\partial \mu_3(t, T)}{\partial t} \right]_{T,p} dt, \quad (3)$$

здесь $\mu_4(0)$ - химический потенциал чистого He^4 при нулевой температуре; s_4 - энтропия чистого He^4 ; $\mu_3(t, T)$ - химический потенциал He^3 в растворе концентрации t при температуре T . Так как $(\partial\mu_4/\partial P)_{T,x} = v_4$, где v_4 - объём, приходящийся на один атом He^4 , и можно считать, что v_4 не зависит от P , то из условий (2) и (3) получаем выражение для давления

$$P = \frac{1}{v_4} \int_0^x \frac{t}{1-t} \left[\frac{\partial\mu_3}{\partial t} \right]_{P,T} dt + \frac{1}{v_4} \int_0^T s_4 dT. \quad (4)$$

Первый член в (4) характеризует осмотическое давление Π , а второй - давление фонтанирования P_f . Давление в камере испарения составляет $\sim 5 * 10^{-2}$ Торр, и при $T \leq 0,6$ К $\Pi \gg P_f$, поэтому в (3) второй и третий члены много меньше четвёртого, а это означает, что условие равновесия (2) сводится к постоянству осмотического давления. Химический потенциал растворённого вещества при малых концентрациях раствора может быть представлен в виде

$$\mu_3(x, T) = T \ln x + \psi, \quad (5)$$

где ψ есть функция только давления P и температуры T . Используя соотношение (5), получим из (4) условие равновесия при малых концентрациях в виде

$$\Pi = \frac{Tx}{v_4} = const, \quad xT = const \quad (6)$$

Из этого выражения следует, что концентрация He^3 в растворе, заполняющем камеру испарения, составляет примерно 0,1%. Несмотря на, казалось бы, низкую концентрацию He^3 в жидкости, концентрация He^3 в паре, заполняющем испаритель при 0,6 К, составляет $\sim 95\%$. По этой причине при откачке паров из испарителя удаляется почти чистый He^3 .

К низкотемпературным частям рефрижератора относятся также ванна С, заполненная He^4 и имеющая температуру $\sim 1,3$ К, и дроссель К (смотри рис.2). Этот дроссель изготавливается таким

образом, чтобы падение давления на нём при протекании жидкости со скоростью, определяемой заданной величиной циркуляции He^3 , превосходило упругость пара He^3 при 1,3 К. При этом в ванне С будет происходить конденсация He^3 .

Таким образом, при работе рефрижератора происходит следующее. Почти чистый газообразный He^3 , откачиваемый из камеры испарения, сжимается системой вакуумных насосов до давления порядка 0,1 – 1 бар, последовательно охлаждается до 4,2 К и 1,3 К (давление насыщенного пара $He^3 \sim 28,4$ Торр), конденсируется и поступает в теплообменник камеры испарения, где принимает её температуру (участок АОО'А' диаграммы). Двигаясь далее, жидкий He^3 в низкотемпературном теплообменнике Н охлаждается и поступает в верхнюю фазу раствора, заполняющего камеру растворения (участок АВ). Переход He^3 из верхней фазы в нижнюю (участок ВD диаграммы) сопровождается поглощением тепла. После камеры растворения He^3 , имеющий низкую температуру, поступает в теплообменник Н, где охлаждает поток, входящий в камеру растворения, причём по мере продвижения к камере испарения температура He^3 повышается, а концентрация в растворе понижается (участок DE). В камере испарения He^3 из слабого жидкого раствора переходит в высококонцентрированный пар (участок EA' диаграммы), затем откачивается, охлаждается, конденсируется и т.д., так что реализуется замкнутый цикл.

3 Основные узлы рефрижератора растворения

1) Камера растворения

Температура концентрированной фазы, входящей в камеру растворения, зависит от того, как хорошо He^3 был охлаждён в теплообменнике потоком выходящей из камеры растворения холодной разбавленной фазы. Так как сопротивление Капицы между He^3 и стенками теплообменника и между стенками теплообменника и разбавленным раствором сильно зависят от температуры

($\sim 1/T^3$), то температура входящего He^3 всегда значительно выше температуры в камере растворения. Из-за этого часть холода растворения He^3 в He^4 идёт на охлаждение перегретого входящего потока концентрированной фазы. Обозначим температуру входящей концентрированной фазы T_c , а температуру в камере растворения T_m . Вся теплота, поглощаемая при растворении, есть $\dot{n}_3 T_m (S_d(T_m) - S_3(T_m))$ (смотри соотношение (1)). Согласно значениям, приведённым в [2], теплоёмкости для концентрированной и разбавленной фаз на один моль He^3 при температурах ниже 40 мК, равны $C_3 = 24T, C_d = 108T$ Дж/моль·К. Отсюда получаем зависимости энтропий от температуры

$$S_3(T) = \gamma_3 T, \quad S_d(T) = \gamma_d T, \quad \gamma_3 = 24, \quad \gamma_d = 108 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}^2 \quad (7)$$

С учётом соотношений (7) теплота, поглощаемая при растворении имеет вид

$$\dot{Q}_{He^3 \rightarrow He^4} = \dot{n}_3 T_m (\gamma_d T_m - \gamma_3 T_m) = \dot{n}_3 T_m^2 (\gamma_d - \gamma_3) \quad (8)$$

Теплота, отнимаемая у входящего He^3 при его охлаждении, равна

$$\dot{Q}_{He^3} = \dot{n}_3 \int_{T_m}^{T_c} T dS = \dot{n}_3 \int_{T_m}^{T_c} \gamma_3 T dT = \frac{\dot{n}_3 \gamma_3}{2} (T_c^2 - T_m^2) \quad (9)$$

Обозначим через \dot{Q} мощность теплопритока к камере растворения, тогда уравнение теплового баланса запишется в виде

$$\dot{Q}_{He^3 \rightarrow He^4} = \dot{Q} + \dot{Q}_{He^3}, \quad \frac{\dot{Q}}{\dot{n}_3} = (\gamma_d - \frac{\gamma_3}{2}) T_m^2 - \frac{\gamma_3}{2} T_c^2 \quad (10)$$

Соотношение (10) выражает зависимость температуры в камере растворения от подводимой мощности, скорости циркуляции He^3 в системе и температуры концентрированной фазы, входящей в камеру растворения. Из него также видно, что при фиксированных подводимой мощности и скорости циркуляции, минимальная температура в камере растворения получается при $T_c = T_m$. Отсюда видна необходимость иметь теплообменники очень высокого качества, чтобы обеспечить возможно более низкое значение температуры T_c .

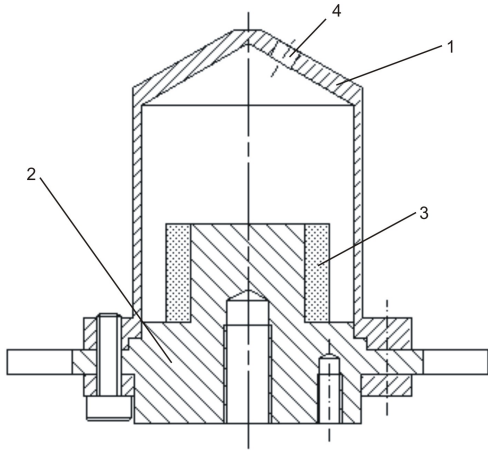


Рис. 3: Чертёж камеры растворения.

На рис.3 приведён чертёж камеры растворения, используемой в нашей установке. В её корпусе (1), сделанном из латуни, имеется отверстие (4) для впаивания стеклянноплатинового герморазъёма, через который в камеру растворения вводятся провода к термометру и нагревателю. Корпус камеры растворения крепится к медной пластине (2) с использованием индиевого уплотнения. Донный теплообменник из мелкодисперсного серебра (3) позволяет увели-

чить эффективную поверхность контакта между раствором при температуре T_m в камере растворения и медной пластиной в её основании. Объём камеры растворения составляет $\sim 12 \text{ см}^3$.

2) Низкотемпературные теплообменники.

Теплообменники являются наиболее важными элементами в конструкции рефрижератора растворения. Используются два принципиально разных типа теплообменников. В теплообменнике непрерывно-противоточного типа температура стенки теплообменника изменяется вдоль его длины и теплообмен между двумя потоками жидкости осуществляется через стенку. Теплопроводность вдоль теплообменника и вдоль потока жидкого гелия внутри него играет относительно малую роль. В дискретных или ступенчатых теплообменниках температура почти одинакова во всех частях медного корпуса каждой ступени.

Располагают непрерывные теплообменники между камерами растворения и испарения. Для их изготовления используют тонкостенные трубки с низкой теплопроводностью, например, из мельхиора — сплава меди с никелем. Обычно это две трубки, вставленные одна в другую; по трубке меньшего диаметра движется

входящий поток He^3 , а разбавленный поток занимает кольцевой зазор между трубками. Перед входом в непрерывный теплообменник обычно устанавливают вспомогательный дроссель, который создает дополнительное сопротивление потоку входящей жидкости, а значит давление на входе повышается. Такое повышение давления предохраняет конденсированный He^3 от повторного испарения в камере испарения. Важным преимуществом непрерывных теплообменников является их небольшой объём (в нашей установке объём теплообменника составляет $\sim 1,5 \text{ см}^3$); это экономит He^3 и уменьшает время охлаждения.

Из предыдущего рассмотрения ясно, насколько важно получить на входе в камеру растворения температуру, как можно более близкую к температуре в самой камере. Это можно сделать, увеличивая площадь теплового контакта между противоположно направленными потоками жидкости. Для теплообменника типа "труба в трубе" поверхность теплообмена пропорциональна произведению квадрата диаметра внутренней трубки на её длину, но увеличение диаметра приводит к возрастанию потока тепла за счёт теплопроводности жидкости. Можно увеличить длину теплообменника, но в этом случае увеличивается объём используемого гелия. Если увеличивать диаметр только внутренней трубки, то возрастает импеданс канала между трубками, и увеличивается вязкостный нагрев. Ясно, что окончательный выбор размеров трубок теплообменников представляет собой компромисс между этими противоречивыми требованиями.

Ступенчатые теплообменники обычно изготавливают из медных блоков. Эти теплообменники заполняются спечённым серебряным порошком или тонкой медной фольгой, чтобы обеспечить большую площадь контактирующей с жидкостью поверхности.

В установке, собираемой в нашей лаборатории, использовался непрерывно-противоточный теплообменник, соединяющий камеры

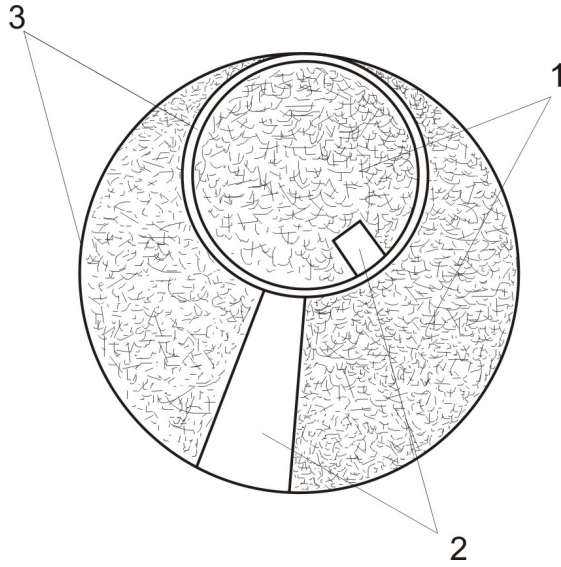


Рис. 4: 1 — порошок из спечённой меди, 2 — каналы, свободные от меди, 3 — мельхиоровые трубки.

меди каналы, для существенного уменьшения гидравлического импеданса теплообменника. Площади этих каналов составляют $s_3 \sim 0,4 \text{ мм}^2$ и $s_d \sim 0,9 \text{ мм}^2$ соответственно. Поперечное сечение теплообменника изображено на рис.4 . По внутренней трубке идёт концентрированная фаза, а по наружной — разбавленная. Общая длина теплообменника составляет 110 см. Масса медного порошка, использованного для изготовления внутренней трубки, составляет 7 г, а для наружной трубки — 8,9 г. Используя эти данные, легко определить эффективную площадь поверхности на единицу длины в концентрированной фазе — $\sigma_3 \sim 64 \text{ см}$ и в разбавленной — $\sigma_d \sim 81 \text{ см}$.

Оценим импедансы каналов для концентрированной и разбавленной фаз, а также сопротивления Капицы на границах раздела стенок теплообменника с He^3 и разбавленным раствором He^3 в He^4 . Импеданс канала определяется из зависимости перепада давления и объёмной скорости течения вязкой жидкости по каналу. Этот коэффициент зависит только от геометрии канала. Зависимость

растворения и испарения. Он представляет собой две мельхиоровые трубки, вложенные одна в другую (внутренняя трубка — $1,9 \times 0,2 \text{ мм}$, наружная — $2,6 \times 0,2 \text{ мм}$).

Внутренняя трубка и пространство между внутренней и наружной трубками заполнено порошком из спечённой электролитической меди, у которой площадь поверхности на один грамм составляет $\sim 1000 \text{ см}^2$. Также во внутренней трубке и в пространстве между трубками сделаны свободные от спечённой

перепада давления от объёмной скорости течения несжимаемой жидкости имеет вид

$$\Delta P = \Delta Z \eta \dot{V} \quad (11)$$

где η — вязкость жидкости, а \dot{V} — объёмная скорость течения жидкости. Импеданс единицы длины цилиндрической трубки диаметра d равен $\frac{Z}{L} = \frac{128}{\pi d^4}$, для прямоугольной трубки с меньшей стороной b — $\frac{Z}{L} = \frac{12}{ab^3}$, а для трубки квадратного сечения со стороной a — $\frac{Z}{L} = \frac{28}{a^4}$. Считая каналы в теплообменнике квадратными, можно оценить их импедансы на единицу длины как

$$\frac{\Delta Z_c}{\Delta x} = 117 * 10^{12} \text{ м}^{-4}, \quad \frac{\Delta Z_d}{\Delta x} = 28 * 10^{12} \text{ м}^{-4} \quad (12)$$

соответственно для концентрированной и разбавленной фаз.

По экспериментальным данным Зиновьевой [3], граничное сопротивление между медью с одной стороны и He^4 , He^3 или слабыми растворами He^3 в He^4 с другой при температурах ниже 0,3 К не зависит от состава жидкости и материала стенки и равно

$$\rho_3 = \rho_d = \frac{\alpha}{T^3}, \quad \alpha \sim 5 * 10^{-3} \text{ К}^4 \cdot \text{м}^2 / \text{Вт} \quad (13)$$

Эти значения будут использованы в дальнейших оценках.

3) Камера испарения.

В камере испарения He^3 переходит из слабого раствора ($x_d \sim 0,1\%$) в высококонцентрированный пар согласно диаграмме жидкость — пар для смесей $He^3 - He^4$ (смотри рис.2). Сверхтекучая плёнка He^4 , поднимающаяся по стенкам камеры, испаряясь, повышает концентрацию He^4 в циркулирующей смеси, что ухудшает рабочие характеристики рефрижератора. В связи с этим важным элементом камеры испарения является подавитель сверхтекучей плёнки He^4 . Принцип его действия заключается в том, что поднимающаяся по стенкам камеры плёнка испаряется дополнительным нагревателем (мощностью $\sim 1,5$ мВт). Образовавшийся пар He^4 направляется на холодный медный экран, где конденсируется и опять попадает в слабый раствор He^3 в He^4 .

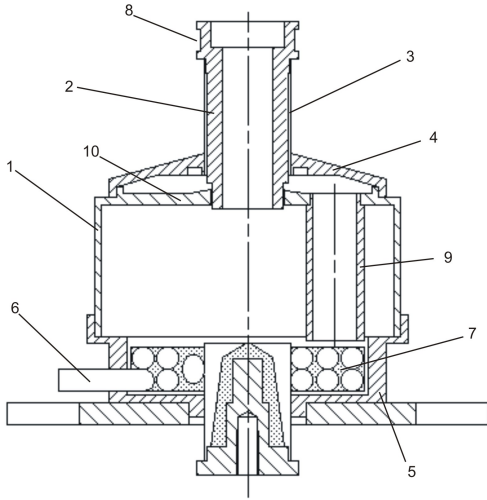


Рис. 5: Чертёж камеры испарения.

На рис.5 приведен чертёж камеры испарения, использующейся в нашей установке. Основание камеры (5), её боковые стенки (1), а также трубка откачки (2) сделаны из меди. На верхний конец трубки откачки (8) наматывается нагреватель подавителя плёнки. Между холодным медным экраном (10) и трубкой откачки камеры (2) имеется зазор шириной 0,2 мм для прохождения сверхтекучей плёнки. Сконденсировавшийся на холодном медном экране (10) He^4 стекает на дно камеры по трубке (9). Тепловая развязка на трубке откачки (3) и верхняя часть камеры (4) изготовлены из нержавеющей стали, материала с малой теплопроводностью. На дне камеры располагается змеевик из трубки, по которой течёт концентрированная фаза (6). Для увеличения эффективной площади теплового контакта используется порошок из спечённой бронзы (7). Объём камеры испарения составляет $\sim 23 \text{ см}^3$.

Полная схема машины растворения изображена на рис.6. Цифрами обозначены: 1 — трубка откачки вакуумной рубашки, 2 — трубка откачки камеры испарения, 3 — змеевик, в котором происходит конденсация He^3 , 4 — трубка откачки градусной пластины, 5 — градусная пластина, 6 — капилляр концентрированной фазы, 7 — камера испарения, 8 — теплообменник, 9 — камера растворения.

4 Оценка минимальной температуры

Оценим температуру, получаемую в камере растворения, в рамках следующей модели. Камеры растворения и испарения соединены

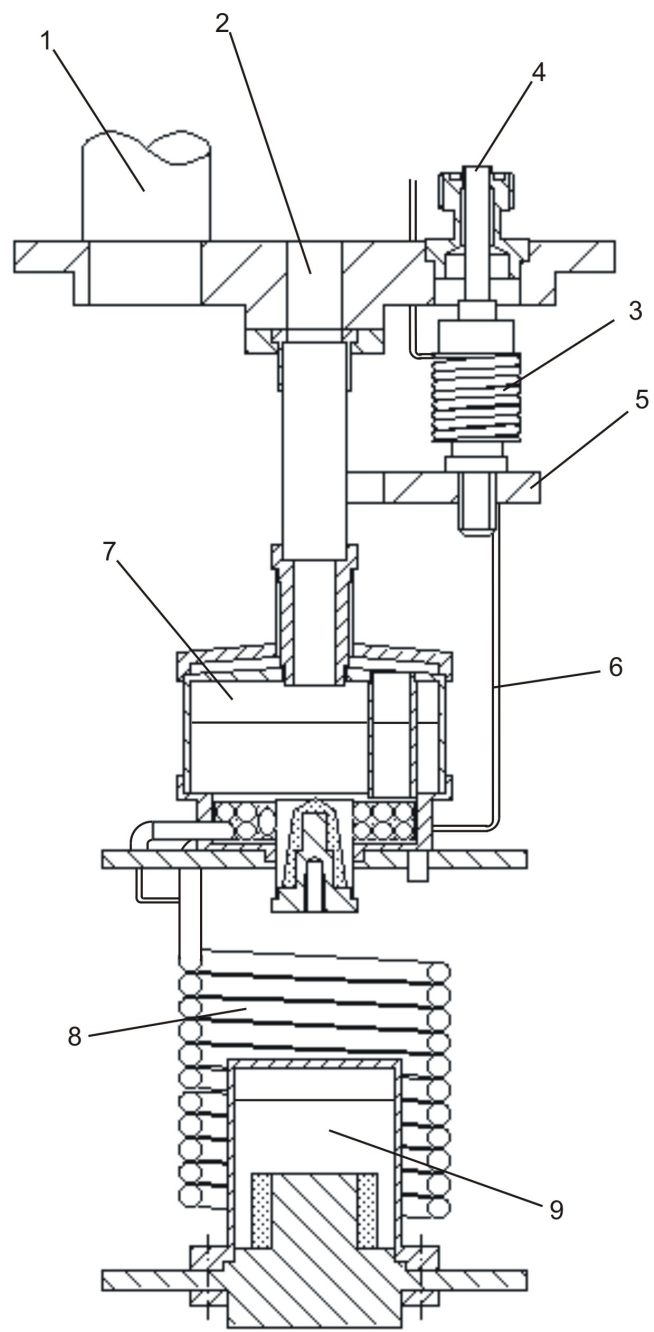


Рис. 6: Сборочный чертёж машины растворения.

друг с другом непрерывно-противоточным теплообменником, параметры которого приведены выше. Теплоприток к камере растворения составляет обычно $\sim 1 - 2$ мкВт, значение $\dot{Q} = 1$ мкВт и будет использоваться в дальнейших оценках. В уравнение (10) теплового баланса в камере растворения входит как T_m , так и T_c , поэтому необходимо ещё одно соотношение, связывающее эти величины. Это соотношение можно получить из уравнений теплообменника, которые имеют вид

$$s_3 \frac{d}{dx} \left(k_3(T) \frac{dT_c}{dx} \right) + \eta_3 \dot{V}_3^2 \frac{dZ_3}{dx} + \sigma_3 \int_{T_c}^{T_b} \frac{dT}{\rho_3} = \dot{n}_3 C_3 \frac{dT_c}{dx} \quad (14)$$

$$s_d \frac{d}{dx} \left(k_d(T) \frac{dT_d}{dx} \right) + \eta_d \dot{V}_d^2 \frac{dZ_d}{dx} + \sigma_d \int_{T_b}^{T_d} \frac{dT}{\rho_d} = \dot{n}_3 C_d \frac{dT_d}{dx} \quad (15)$$

здесь T_b - температура стенки теплообменника, s_j - площадь поперечного сечения потока жидкости, k_j - коэффициент теплопроводности жидкости, η_j - вязкость жидкости, \dot{V}_j - объёмная скорость течения жидкости, Z_j - импеданс соответствующего канала, σ_j - эффективная площадь поверхности границы жидкость-стенка на единицу длины, ρ_j - сопротивление Капицы, \dot{n}_3 - скорость циркуляции He^3 в системе, а C_j - теплоёмкость жидкости. Ось x направлена вдоль теплообменника от его тёплого конца к холодному.

Первые члены в левой части этих равенств определяют поток тепла, поступающий в элемент длины dx , за счёт теплопроводности жидкости, вторые — вязкостный нагрев этого элемента, третьи — описывают поток тепла от концентрированной или разбавленной фазы к стенке, правые части этих равенств описывают изменение температуры элемента dx в потоке концентрированной или разбавленной фазы.

Если первыми двумя членами в левой части каждого из этих равенств можно пренебречь по сравнению с третьим и считать, что вся теплота от концентрированной фазы переходит в разбавленную, то теплообменник называют идеальным. В дальнейшем тексте мы

будем, в основном, придерживаться этой модели.

Учитывая температурную зависимость (13) ρ_3 и ρ_d , получим потоки тепла со стороны концентрированной фазы в стенку и из стенки в разбавленную в виде

$$\frac{\sigma_3}{\alpha} \int_{T_b}^{T_c} T^3 dT = \dot{Q}_{c \rightarrow b}, \quad \frac{\sigma_d}{\alpha} \int_{T_d}^{T_b} T^3 dT = \dot{Q}_{b \rightarrow d} \quad (16)$$

здесь предполагается, что в направлении, поперечном течению нет градиентов температуры ни в стенке теплообменника, ни в самих жидкостях. Из идеальности теплообменника следует, что $\dot{Q}_{c \rightarrow b} = \dot{Q}_{b \rightarrow d} = \dot{Q}_{c \rightarrow d}$. Тогда, произведя интегрирование в (16), получим

$$T_c^4 - T_b^4 = \frac{4\alpha}{\sigma_3} \dot{Q}_{c \rightarrow d}, \quad T_b^4 - T_d^4 = \frac{4\alpha}{\sigma_d} \dot{Q}_{c \rightarrow d} \quad (17)$$

Складывая уравнения (17), исключаем температуру стенки T_b

$$T_c^4 - T_d^4 = 4\alpha \dot{Q}_{c \rightarrow d} \left(\frac{1}{\sigma_3} + \frac{1}{\sigma_d} \right)$$

откуда

$$\dot{Q}_{c \rightarrow d} = \frac{T_c^4 - T_d^4}{4\alpha} \frac{\sigma_3 \sigma_d}{\sigma_3 + \sigma_d} \quad (18)$$

Выражение (18) определяет поток тепла от концентрированной фазы к разбавленной. Пусть

$$A = \frac{\sigma_3 \sigma_d}{\sigma_3 + \sigma_d} = 0,36 \text{ м} \quad (19)$$

тогда уравнение теплообменника для концентрированной фазы принимает вид

$$-\dot{n}_3 \gamma_3 T_c \frac{dT_c}{dx} = \frac{(T_c^4 - T_d^4) A}{4\alpha} \quad (20)$$

Пользуясь температурными зависимостями теплоёмкостей (7), получаем из равенства $dH_3 = dH_d$

$$\gamma_3 T_c dT_c = \gamma_d T_d dT_d \quad (21)$$

G.Frossati [1] получил отсюда связь между температурами концентрированной и разбавленной фаз в виде

$$T_d^2(x) = \frac{\gamma_3}{\gamma_d} T_c^2(x) \quad (22)$$

Далее, подставляя её в соотношение (20), и интегрируя вдоль теплообменника от его тёплого конца с температурой $T(Still) = T_s$ до холодного конца с температурой T_c , он получил

$$\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_s^2} = \frac{\left(1 - \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_d}\right)^2\right) AL}{2\alpha\dot{n}_3\gamma_3} \quad (23)$$

Так как $T_s \sim 0,6$ К, а T_c не превосходит десятков милikelьвин, то в левой части равенства (23) можно пренебречь $1/T_s^2$ по сравнению с $1/T_c^2$ и, таким образом, получить температуру T_c концентрированной фазы на входе в камеру растворения. Изменение же температуры вдоль теплообменника принимает вид

$$T_c(x) = \sqrt{\frac{2\alpha\gamma_3\dot{n}_3}{A\left(1 - \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_d}\right)^2\right)} x} \quad (24)$$

где x — расстояние от тёплого конца теплообменника.

Затем найденное выражение для T_c использовалось в соотношении (10) для теплового баланса в камере растворения, откуда и определялась температура T_m , окончательное выражение для которой имеет вид

$$T_m^2 = \frac{2}{2\gamma_d - \gamma_3} \frac{\dot{Q}}{\dot{n}_3} + \frac{2\gamma_3^2}{(2\gamma_d - \gamma_3)\left(1 - \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_d}\right)^2\right)} \frac{\dot{n}_3\alpha}{AL} \quad (25)$$

Это простое выражение используется для оценок температуры, получаемой в камере растворения.

Однако, в модели G.Frossati есть противоречие. Оно заключается в том, что, во-первых, пользуясь соотношениями (24) и (22), можно

определить температуру $T_d(L)$ разбавленной фазы на выходе из камеры растворения, и эта температура отличается от температуры T_m , вычисленной по формуле (25). А во-вторых, при теплопритоке к камере растворения, превышающем

$$\frac{\gamma_3^2}{1 + \frac{\gamma_3}{\gamma_d}} \frac{\dot{n}^2 \alpha}{AL} = 0,23 \text{ мкВт}$$

значение T_m вообще становится больше, чем температура выходящей разбавленной фазы $T_d(L)$. Причина этого противоречия в том, что при интегрировании равенства (21) не было учтено граничное условие для разбавленной фазы на холодном конце теплообменника.

Основываясь на анализе, предложенном Y.Такао [5], учтём равенство температуры выходящей из камеры растворения разбавленной фазы и температуры в камере растворения, то есть в решение дифференциального уравнения (21) подставим $T_d(L) = T_m$, получим

$$\gamma_3(T_c^2 - T_c^2(x)) = \gamma_d(T_m^2 - T_d^2(x)) \quad (26)$$

Выражая из (10) $\gamma_3 T_c^2 : \gamma_3 T_c^2 = (2\gamma_d - \gamma_3)T_m^2 - 2\frac{\dot{Q}}{\dot{n}_3}$ и подставляя результат в (26), находим

$$\gamma_d T_d^2(x) = \gamma_3 T_c^2(x) - (\gamma_d - \gamma_3)T_m^2 + 2\frac{\dot{Q}}{\dot{n}_3}. \quad (27)$$

Мы получили новую зависимость $T_d^2(x)$ от $T_c^2(x)$ вместо соотношения (22). Подставляя её в уравнение идеального теплообменника для концентрированной фазы (20), получим уравнение

$$\int_{T_c}^{T_s} \frac{d(T_c^2)}{aT_c^4 + bT_c^2 - d} = \int_0^L \frac{A dx}{2\alpha\dot{n}_3\gamma_3}, \quad (28)$$

с коэффициентами

$$a = 1 - \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_d}\right)^2$$

$$b = \frac{2\gamma_3}{\gamma_d} \left(\left(1 - \frac{\gamma_3}{\gamma_d}\right) T_m^2 - \frac{2\dot{Q}}{\gamma_d\dot{n}_3} \right)$$

$$d = \left(\left(1 - \frac{\gamma_3}{\gamma_d} \right) T_m^2 - \frac{2\dot{Q}}{\gamma_d \dot{n}_3} \right)^2$$

здесь верхний предел интегрирования в левой части уравнения заменим ∞ , как это делалось у G.Frossati, так как температура $T_s \gg T_c$.

Интегрируя (28) с коэффициентами a, b и d , получаем

$$\frac{\ln \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_d} \right)^2 \right) T_c^2 + \left(1 - \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_d} \right)^2 \right) T_m^2 - \frac{\left(1 + \frac{\gamma_3}{\gamma_d} \right) 2\dot{Q}}{\dot{n}_3 \gamma_d}}{\left(1 - \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_d} \right)^2 \right) T_c^2 - \left(1 - \frac{\gamma_3}{\gamma_d} \right)^2 T_m^2 + \frac{\left(1 - \frac{\gamma_3}{\gamma_d} \right) 2\dot{Q}}{\dot{n}_3 \gamma_d}} \right)}{\left(1 - \frac{\gamma_3}{\gamma_d} \right) T_m^2 - \frac{2\dot{Q}}{\dot{n}_3 \gamma_d}} = \frac{AL}{\alpha \dot{n}_3 \gamma_3} \quad (29)$$

Равенство (29) справедливо, только когда знаменатель его левой части отличен от нуля, то есть при

$$T_m^2 \neq \frac{2\dot{Q}}{(\gamma_d - \gamma_3)\dot{n}_3} \quad T_m \neq 11 \text{ мК} \quad (30)$$

случай с $T_m^2 = \frac{2\dot{Q}}{(\gamma_d - \gamma_3)\dot{n}_3}$ требует особого рассмотрения (см. ниже). Далее, в выражение, стоящее под знаком логарифма в (29), входит T_c^2 . Выражая его опять же из равенства (10) и подставляя результат в (29), получаем уравнение относительно T_m .

$$T_m^2 = \frac{2}{\gamma_d - \gamma_3} \frac{\dot{Q}}{\dot{n}_3} + \frac{\gamma_d \gamma_3}{(\gamma_d - \gamma_3)} \frac{\dot{n}_3 \alpha}{AL} \ln \left(\frac{(\gamma_d + \gamma_3) \left((\gamma_d - \gamma_3) T_m^2 - \frac{\dot{Q}}{\dot{n}_3} \right)}{(\gamma_d - \gamma_3) \left(\gamma_d T_m^2 - \frac{\dot{Q}}{\dot{n}_3} \right)} \right) \quad (31)$$

Значения температуры T_m в камере растворения определяются корнями уравнения (31) при условии (30). Один из них равен $\frac{2\dot{Q}}{(\gamma_d - \gamma_3)\dot{n}_3}$, при этом значении T_m^2 выражение, стоящее под знаком логарифма в (31), равно единице. Но этот корень не удовлетворяет условию (30), поэтому он должен быть отброшен. Используя численные значения коэффициентов в уравнении (31), определяем второй его корень, что даёт значение $T_m \approx 8,3 \text{ мК}$.

В случае с $T_m^2 = \frac{2\dot{Q}}{(\gamma_d - \gamma_3)\dot{n}_3}$, коэффициенты b и d в уравнении (28) равны нулю. При этом уравнение (28) переходит в (23), и мы вновь получаем для T_m^2 выражение (25), предложенное G.Frossati, не совпадающее с $T_m^2 = \frac{2\dot{Q}}{(\gamma_d - \gamma_3)\dot{n}_3}$. Как видим, это значение T_m^2 приводит к противоречию и не имеет физического смысла.

Из выражения (31) легко получить температуру T_{00} — температура в отсутствие вообще какого-либо теплопритока к камере растворения. Положив в (31) $\dot{Q} = 0$ находим

$$T_{00}^2 = \ln\left(1 + \frac{\gamma_3}{\gamma_d}\right) \frac{\gamma_d \gamma_3}{\gamma_d - \gamma_3} \frac{\dot{n}_3 \alpha}{AL}, \quad T_{00} \approx 4 \text{ мК} \quad (32)$$

Таким образом, подход Y.Takano даёт значение $T_m \approx 8,3$ мК, а соотношение (25), предложенное G.Frossati, — значение $T_m \approx 8,2$ мК. Различие результатов, полученных разными способами, не превышает 2%. Численный анализ соотношений (25) и (31), описанный в [5], показывает, что заметные расхождения результатов, даваемых этими соотношениями, наблюдаются только при температурах $T_m > 3T_{00}$. Это объясняет частое использование более простого выражения (25) при оценках минимальной температуры.

Оценка первых двух членов уравнения теплообменника.

Во всех проделанных вычислениях из двух уравнений теплообменника использовалось только одно, для концентрированной фазы. Поэтому оценки первых двух членов в уравнении теплообменника тоже будем проводить только для этой фазы.

1) Пренебрегать потоком тепла за счёт теплопроводности жидкости вдоль теплообменника можно в том случае, если этот поток мал по сравнению с потоком тепла через стенку теплообменника. Но в нашей модели поток тепла через стенку теплообменника равен $C_j \dot{n}_3 \Delta T_j$ — изменению энтальпии жидкости, находящейся в элементе канала длины Δx . Поэтому условие малости потока тепла, связанного с теплопроводностью жидкости, можно записать в виде [4]

$$\gamma_3 T_c \dot{n}_3 \Delta T_c \gg s_3 k_3 \frac{\Delta T_c}{\Delta x}, \quad \frac{s_3 k_3}{\gamma_3 T_c \dot{n}_3 \Delta x} \ll 1 \quad (33)$$

где $\gamma_3 T_c$, s_3 , k_3 — теплоёмкость, площадь поперечного сечения канала и коэффициент теплопроводности для концентрированной фазы.

Используя зависимости теплопроводности от температуры, приведённые в [1], оценим значение k_3 при $T \sim 10$ мК как 30 мВт/м·К. Скорость циркуляции He^3 в системе примем равной $2 * 10^{-4}$ молей/с. Площадь поперечного сечения канала для концентрированной фазы, как указывалось выше, составляет $0,4 * 10^{-6}$ м². Тогда значение левой части неравенства (33) составит $\sim 2,5 * 10^{-4}$, и неравенство выполнится с хорошей точностью. Это действительно даёт возможность пренебрегать потоком тепла за счёт теплопроводности в уравнении теплообменника (14).

2) Вязкостный нагрев единицы длины теплообменника равен

$$\frac{\Delta \dot{Q}_{visc}}{\Delta x} = \dot{V} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \eta \dot{V}^2 \frac{\Delta Z}{\Delta x}$$

здесь было учтено выражение (11) для вязкостного падения давления на элементе канала длины Δx . Объёмная скорость течения жидкости равна $\dot{V} = V_\mu \dot{n}_3$, где V_μ — молярный объём жидкости. Для концентрированной фазы при скорости циркуляции He^3 в системе равной $2 * 10^{-4}$ моль/с объёмная скорость составляет $\dot{V}_3 = 74 * 10^{-10}$ м³/с.

Условие малости вязкостного нагревания можно записать в виде

$$\frac{\eta_3 \dot{V}_3^2 \left(\frac{\Delta Z}{\Delta x}\right)_c}{\gamma_3 T_c \dot{n}_3 \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_c} \ll 1 \quad (34)$$

Температурная зависимость коэффициента вязкости имеет вид [2]

$$\eta_3 = \frac{2 * 10^{-7}}{T^2} \text{ Дж}\cdot\text{с}/\text{м}^3$$

Значение импеданса единицы длины канала для концентрированной фазы уже было посчитано, $\left(\frac{\Delta Z}{\Delta x}\right)_c = 117 * 10^{12}$ 1/м⁴, смотри (12). Вязкость, теплоёмкость, а также температурный перепад на единице длины теплообменника зависят от температуры,

а значит и от расположения рассматриваемого элемента Δx теплообменника относительно его концов. Используя численные значения величин, входящих в левую часть неравенства (34), а также соотношение (24) для расчёта T_c и $\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_c$ определим зависимость левой части неравенства (34) от x — расстояния от тёплого конца теплообменника, получим $27,5x^3$. Отсюда видно, что вязкостный нагрев увеличивается при приближении к холодному концу теплообменника. Определим, на каком расстоянии от тёплого конца теплообменника вязкостный нагрев сравнивается с потоком тепла через стенку теплообменника, получим $x \approx 0,33$ м, что соответствует температуре $T_c(0,33) \sim 20,5$ мК (согласно (24)). Этот результат означает, что в действительности пренебрегать вязкостным членом нельзя и температура входящего в камеру растворения He^3 будет выше полученной $T_c \approx 11,6$ мК. В связи с этим, значение $T_m \approx 8,3$ мК нельзя рассматривать как вполне надёжную оценку. Связано это ещё и с отсутствием необходимых сведений о температурной зависимости сопротивления Капицы на границе раздела спечённой меди, используемой в теплообменнике, с концентрированной и разбавленной фазами.

Список литературы

- [1] **G.Frossati.** Experimental techniques:Methods for Cooling Below 300mK, Journal of Low Temperature Physics, Vol.87,595(1992)
- [2] **О.В. Лоунасмаа.** Принципы и методы получения температур ниже 1К. Издательство "Мир", Москва 1977
- [3] **Б.Н.Есельсон, В.Н.Григорьев, В.Г.Иванцов, Э.Я.Рудаковский, Д.Г.Саникидзе, И.А.Сербин** Растворы квантовых жидкостей $He^3 - He^4$. Издательство "Наука", Москва 1973
- [4] **J.D. Siegwarth and Ray Radebaugh.** Analysis of Heat Exchangers for Dilution Refrigerators, The Review of Scientific Instruments, Vol.42(8),1111(August 1971)
- [5] **Y.Takano** Cooling power of the dilution refrigerator wiht a perfect continuous counterflow heat exchanger, The Review of Scientific Instruments, Vol.65(5),1667(May 1994)