Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.5, стр.309 - 312 © 1996г. 10 сентября

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЭЙНШТЕЙНА

В.И. Марченко[1)]

Институт физики твердого тела РАН

142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 30 мая 1996 г.

Дано описание представлений общей линейной группы $GL(4.R)$. Эта группа соответствует преобразованиям пространства-времени, обсуждаемым в общей теории относительности. Кроме известных тензорных представлений, группа характеризуется бесконечномерными представлениями с целыми и полуцелыми спинами. Это обстоятельство открывает естественную принципиальную возможность построения ковариантной теории поля частиц.

PACS: 02.20.Hj; 04.20.cv; 04.62.+v; 11.30.-j

Общая теория относительности [1] основана на анализе непрерывных преобразований четырехмерного пространства-времени, которые порождают группу линейных преобразований для дифференциалов координат

$$dx^i = a^i{}_k dx'^k, \tag{1}$$

где $a^i{}_k$ – действительная матрица 4×4:

$$a^i{}_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}. \tag{1a}$$

В математике группа преобразований вида (1) называется общей линейной группой $GL(4.R)$. В физике естественно называть ее группой Эйнштейна. Группа вращений пространства и группа Лоренца являются, очевидно, подгруппами группы Эйнштейна.

Все конечномерные представления групп $GL(N.R)$ построены Гельфандом и Цейтлиным [2]. В нашем случае $GL(4.R)$ эти представления, по-видимому, эквивалентны тензорным. Тот факт, что обычные спинорные представления (спин 1/2) группы Лоренца не могут быть обобщены в группе Эйнштейна, стал известен практически сразу после появления уравнения Дирака. Эта неприятность преодолевалась различными способами, однако, вряд ли их можно считать естественными. В настоящем сообщении обращается внимание на бесконечномерные представления группы Эйнштейна. Среди них имеются представления с полуцелыми спинами.

Как известно (см., например [3]), неприводимые представления группы Лоренца определяются парой чисел (k_0, c), где k_0 – целое или полуцелое неотрицательное число, а c – комплексное число. При этом неприводимое представление, отвечающее данной паре (k_0, c), при надлежащем выборе базиса $f_{k,\nu}$ в пространстве представления задается формулами

$$L_+ f_{k\nu} = \sqrt{k+\nu+1}\sqrt{k-\nu} f_{k,\nu+1},$$

$$L_- f_{k\nu} = \sqrt{k+\nu}\sqrt{k-\nu+1} f_{k,\nu-1}, \; L_3 f_{k\nu} = \nu f_{k\nu},$$

[1)] e-mail: mar@issp.ac.ru

$$F_3 f_{k\nu} = C_{k\nu} f_{k-1,\nu} - \nu \frac{ik_0 c}{k(k+1)} f_{k\nu} - C_{k+1,\nu} f_{k+1,\nu},$$

$$C_{k\nu} = \frac{\sqrt{k^2-\nu^2}\sqrt{k^2-k_0^2}\sqrt{c^2-k^2}}{k\sqrt{4k^2-1}}, \tag{3}$$

где L_+, L_-, L_3 – операторы пространственных поворотов, F_3 – оператор лоренцевского поворота в плоскости (t, z). Лоренцевские повороты в остальных плоскостях легко восстанавливаются по коммутационным соотношениям лоренцевских и пространственных поворотов. Если $c^2 = (k_0 + n)^2$ при некотором натуральном n, то представление конечномерно и возможными значениями индексов ν и k являются: $\nu = -k, -k+1, ..., k$; $k = k_0, k_0+1, ..., k_0+n-1$. Если же $c^2 \neq (k_0+n)^2$ ни при каком натуральном n, то представление бесконечномерно, и возможными значениями ν и k являются $\nu = -k, -k+1, ..., k$; $k = k_0, k_0+1, k_0+2, ...$

В качестве одной из 10 матриц, дополняющих группу Лоренца до группы Эйнштейна, удобно выбрать единичную матрицу – она описывает общее изменение масштаба пространства-времени. Поскольку эта матрица коммутирует с произвольными матрицами, можно всегда выбрать базис так, что все функции данного представления будут собственными функциями соответствующего оператора M с одним и тем же собственным значением μ. Так, например, у векторного представления $\mu = 1$, для ковариантного вектора $\mu = -1$, для тензорного представления μ равно рангу тензора. В общем случае μ – некоторое комплексное число.

Отмечу здесь, что, если ограничиться преобразованиями группы Лоренца и масштабным преобразованием M, то в полной аналогии с принципами общей теории относительности можно построить ее усеченный вариант, в котором полностью сохранится классификация представлений группы Лоренца и гравитация в первом приближении будет совпадать с ньютоновским пределом, спиральность гравитонов будет равна нулю и в теории будут отсутствовать особенности метрики типа черных дыр. Однако поправки к ньютоновскому приближению отличаются от эйнштейновских, что приводит, в частности, к иным численным коэффициентам в эффектах преломления светового луча в гравитационном поле и векового смещения перигелия орбит. Если в настоящее время нет сомнений в экспериментальном подтверждении следующих из общей теории относительности величин этих эффектов, то усеченный вариант не соответствует реализованному в природе.

Выбирая как-либо оставшиеся 9 матриц, нетрудно убедиться, что достаточно определить один из соответствующих операторов, а действие остальных 8 легко находится с помощью коммутационных соотношений с операторами группы Лоренца.

Исследование показывает, что расширение до представлений группы Эйнштейна допускают лишь представления группы Лоренца, у которых одно из чисел (k_0 либо c) равно нулю. Так как формулы (2) симметричны по взаимной перестановке k_0 и c, введем одну букву для задания таких представлений группы Лоренца – s, которая теперь может быть любым комплексным числом. При этом, если s равна целому либо полуцелому числу, то в приведенных ниже формулах участвуют функции, осуществляющие представления группы Лоренца либо $(0, s)$, либо $(s, 0)$, в остальных случаях – только $(0, s)$.

Действие оператора A_3, соответствующего бесконечно малому ортогональному повороту в плоскости (t, z) на угол $\delta\chi$,

$$\delta t = \delta\chi z, \ \delta z = -\delta\chi t,$$

при надлежащем выборе базиса неприводимого представления определяется следующими формулами:

$$\delta f_{sk\nu} = \delta\chi A_3 f_{sk\nu},$$

$$\begin{aligned}
A_3 f_{sk\nu} = {} & D_s\sqrt{k-s}\sqrt{k+s+1}\sqrt{k+s+2}\sqrt{k+s+3}B_{k+1,\nu}f_{s+2,k+1,\nu} + \\
& + D_s\sqrt{k-s-1}\sqrt{k-s-2}\sqrt{k-s}\sqrt{k+s+1}B_{k,\nu}f_{s+2,k-1,\nu} + \\
& + D_{s-2}\sqrt{k-s+2}\sqrt{k-s+1}\sqrt{k-s+3}\sqrt{k+s}B_{k+1,\nu}f_{s-2,k+1,\nu} + \\
& + D_{s-2}\sqrt{k-s+1}\sqrt{k+s-2}\sqrt{k+s-1}\sqrt{k+s}B_{k,\nu}f_{s-2,k-1,\nu} + \\
& + \alpha\frac{k+1}{s^2-1}\sqrt{(k+1)^2-s^2}B_{k+1,\nu}f_{s,k+1,\nu} + \alpha\frac{k}{s^2-1}\sqrt{k^2-s^2}B_{k,\nu}f_{s,k-1,\nu},
\end{aligned}$$

$$B_{k\nu} = \sqrt{\frac{k^2-\nu^2}{4k^2-1}}, \ D_s = \frac{\sqrt{\alpha^2-(s+1)^2}}{2(s+1)\sqrt{s(s+2)}}, \tag{4}$$

Для представлений группы Лоренца вида $(s, 0)$ при полуцелых s параметр α может быть произвольным комплексным числом, при целых s – α может принимать лишь целые значения больше единицы. Для представлений вида $(0, s)$ параметр α может быть произвольным комплексным числом, при целом положительном s, если $\alpha = s + n$, где $n > 1$ – нечетное число, представление конечномерно, и, как нетрудно убедиться непосредственным сравнением, эквивалентно тензорному.

Результат (4) получен методом, изложенным в книге [3] на примерах группы вращений и группы Лоренца. Схема решения следующая. Представим оператор A_3 в матричном виде:

$$A_3 f_{\alpha k_0 c k\nu} = A_{\alpha k_0 c k\nu}^{\alpha' k_0' c' k' \nu'} f_{\alpha' k_0' c' k' \nu'}, \tag{5}$$

здесь, помимо чисел k_0, k, ν характеризующих функции базиса неприводимых представлений группы Лоренца, введен дополнительный целочисленный индекс α нумерующий функции, осуществляющие эквивалентные неприводимые представления группы Лоренца (заранее не очевидна кратность представлений группы Лоренца в представлениях группы Эйнштейна). Отметим, что кратность представлений группы вращений у бесконечномерных (конечномерных) представлений группы Эйнштейна линейно растет (падает) с ростом спина. Выписываем уравнения на матричные элементы (5), эквивалентные коммутационным соотношениям матриц 4×4 группы Эйнштейна. При этом получаются линейные и квадратичные по A уравнения. Из условия коммутации ортогональных поворотов в плоскостях (t, z) и (x, y) следует, что $\nu' = \nu$. Из линейных уравнений выясняем зависимость A от индекса ν. Из условия совместности линейных уравнений находим, что одно из чисел (k_0 или c) должно быть равно нулю (для остающегося отличным от нуля числа вводим обозначение s), что верны следующие правила отбора:

$$k = k \pm 1, \ s = s \pm 2, \tag{6}$$

а также выясняем зависимость от индекса k. Анализ квадратичных уравнений показывает, что при надлежащем выборе функций f можно диагонализовать матрицу A по индексу α, то есть кратность представлений группы Лоренца в представлениях группы Эйнштейна равна единице. После этого из квадратичных уравнений легко определить зависимость элементов A от индекса s.

Математической строгости ради следует сказать, что указанное исследование оставляет открытым вопрос, каждой ли паре чисел (α, μ) соответствует представление группы Эйнштейна. Выяснение этого вопроса, однако, требует специального рассмотрения иными методами.

Отметим, что задающие представление числа α, μ имеют смысл квантовых чисел (вполне аналогичных спину) – с ними должны быть связаны определенные законы сохранения, так как эти числа определяют структуру инвариантов в лагранжиане и возможно, что некоторые из сохраняющихся зарядов, характеризующих частицы, сводятся к ним.

---

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теория поля*, М.: Наука, 1979.
2. И.М.Гельфанд, М.Л.Цейтлин, ДАН СССР **71(5)**, 825 (1950).
3. М.А.Наймарк, *Линейные представления группы Лоренца*, М.: ГИФМЛ, 1958.