

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В СМЕКТИКАХ

*В. И. Марченко<sup>a,b\*</sup>, Е. Р. Подоляк<sup>a</sup>*

<sup>a</sup> *Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский физико-технический институт  
, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 18 июня 2010 г.

Выявлены асимптотики деформаций смектика вокруг мультипольных линейных распределений сил. Закон убывания деформаций задается индексами, которые являются собственными значениями нелинейных уравнений, определяющих угловую зависимость деформаций.

Асимптотики деформаций в смектиках в ряде случаев определяются нелинейными эффектами [2]. Большинство таких задач удалось исследовать аналитически [3–5]. Осталась неясной ситуация лишь с одной задачей из указанного в работе [3] списка: дипольный момент силы однородно распределенный вдоль линии нормальной к смектическим слоям. В предлагаемой работе мы покажем, что в этом случае, а также в задачах о линейно распределенных мультипольных моментах, деформации убывают по степенному закону, причем показатели степени можно найти как собственные значения нелинейного уравнения, определяющего угловую зависимость деформации. На некотором макроскопическом расстоянии смещения становятся порядка периода смектика. По мере дальнейшего увеличения радиуса наблюдается: в случае диполя — универсальное поведение, для квадрупольного — логарифмический закон убывания, для высших же моментов применимо линейное приближение.

Энергия упругих деформаций смектика при малых отклонениях ориентации слоев от горизонтальной плоскости ( $xy$ ) равна [1, (44,13)]:

$$E = \frac{A}{2} \int \left( \left( \partial_z u - \frac{(\partial_\mu u)^2}{2} \right)^2 + (\lambda \Delta_\perp u)^2 \right) dV, \quad (1)$$

где  $u(\mathbf{r})$  — смещение слоев вдоль вертикали (ось  $z$ ),  $A > 0$  — упругая постоянная,  $\lambda$  — величина порядка периода смектика,

$$\Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad (\partial_\mu u)^2 = (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2.$$

В обсуждаемой однородной вдоль оси  $z$  задаче расстояние между смектическими слоями по вертикали остается неизменным. Поэтому  $\partial_z u = 0$ , так же как и в исходном (до приложения сил) недеформированном состоянии. Тогда уравнение равновесия приобретает вид

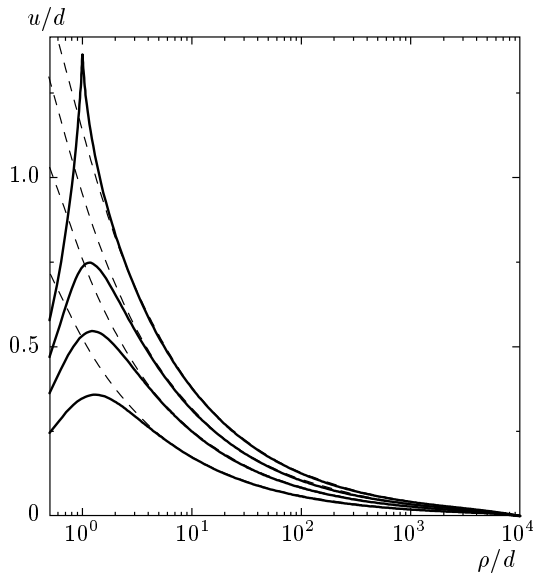
$$\lambda^2 \Delta_\perp^2 u - \frac{1}{2} \partial_\nu \{ (\partial_\mu u)^2 \partial_\nu u \} = \frac{\mathcal{F}(x, y)}{A}, \quad (2)$$

где  $\mathcal{F}$  описывает внешнее воздействие на смектик.

Рассмотрим сначала предел больших смещений  $u \gg \lambda$ , пренебрегая первым членом в уравнении (2). Заметим, что при приложении линейно-распределенной силы деформация убывает по закону  $\partial_\rho u = -\rho^{-1/3}$  [3]. Показатель степени здесь определяется из требования равенства приложенной силы интегралу от напряжения  $\sigma_{z\rho} \propto (\partial_\rho u)^3$  по цилиндрической поверхности радиуса  $\rho$ . Аналогичная процедура для линейного распределения дипольного момента сил оказывается неверной. Независимость от радиуса момента сил, действующих на произвольную цилиндрическую поверхность, приводит к закону  $u \propto \rho^{-1/3}$ . Однако у уравнения (2) нет решения вида  $u = f(\theta)\rho^{-1/3}$ , где  $f$  — периодическая функция азимута.

Чтобы разобраться в этой парадоксальной с точки зрения закона сохранения момента ситуации мы провели численное решение задачи. Момент сил при-

\*E-mail: mar@kapitza.ras.ru



**Рис. 1.** Поле диполя в случае  $\lambda = 0$  как функция радиуса при  $F/Ad = 1$  для углов  $\theta = 0; \pi/6; \pi/4; \pi/3$ . Сплошные линии — численное решение, штриховые — асимптотики (3)

ложим с помощью пары одинаковых и противоположно направленных линейных распределений сил:

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = F\delta(y)(\delta(x-d) - \delta(x+d)).$$

Смектические слои будем считать закрепленными ( $u = 0$ ) на стенках вертикального цилиндра радиуса  $R \gg d$ .

Результаты численного решения дипольной задачи представлены на рис. 1. Оказалось, что на расстояниях  $d \ll \rho \ll R$  наблюдается степенной закон

$$u = \left(\frac{Fd^2}{A}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{d}\right)^\alpha f(\theta), \quad (3)$$

где  $\alpha \approx -0.476$ ,  $f$  — некоторая функция угла  $\theta$ . Угол  $\theta$  будем отсчитывать от оси  $x$ . Фактически, асимптотика (3) реализуется при  $5d < \rho < 0.2R$ .

Таким образом, момент сил, действующих на цилиндрическую поверхность, уменьшается при удалении от оси цилиндра. В такой ситуации необходимо рассмотреть эффекты на торцах мысленно выделенного цилиндра конечной высоты. В рассматриваемом нелинейном режиме анизотропная часть тензора напряжений в смектике равна  $\sigma_{ik} = An_i n_k \delta a/a$ , где  $\delta a/a$  — относительное изменение межплоскостного расстояния в смектике,  $n_i$  — компоненты еди-

ничного вектора нормали к смектическим слоям. Если  $\partial_z u = 0$ , то при малых углах

$$\sigma_{xz} = A\partial_x u \frac{\delta a}{a} = -\frac{A}{2}\partial_x u (\partial_\mu u)^2.$$

Закон сохранения момента выполняется при учете момента сил

$$LF_x^s = \int \sigma_{xz} dS,$$

действующих на торцах цилиндра высоты  $L$ . Это подтверждается в численном решении. Силы на верхнем и нижнем торцах одинаковы по величине, противоположно направлены и набираются, в основном, на расстояниях порядка  $d$ .

Приведенные численные результаты существенно облегчают задачу аналитического определения нелинейных мультипольных деформаций.

*Диполь*,  $\lambda = 0$ . Тот факт, что амплитуда деформации в нелинейном режиме  $u \propto (F/A)^{1/3}$ , очевиден из уравнения равновесия (2). Функцию же  $f$  и индекс  $\alpha$  можно найти как собственные функции и собственные значения следующей нелинейной задачи. Ищем решение уравнения (2) в виде (3). Для функции  $f$  получаем уравнение

$$(\alpha^2 f^2 + 3\dot{f}^2)\ddot{f} + \alpha(5\alpha + 2)f\dot{f}^2 + \alpha^3(3\alpha - 2)f^3 = 0, \quad (4)$$

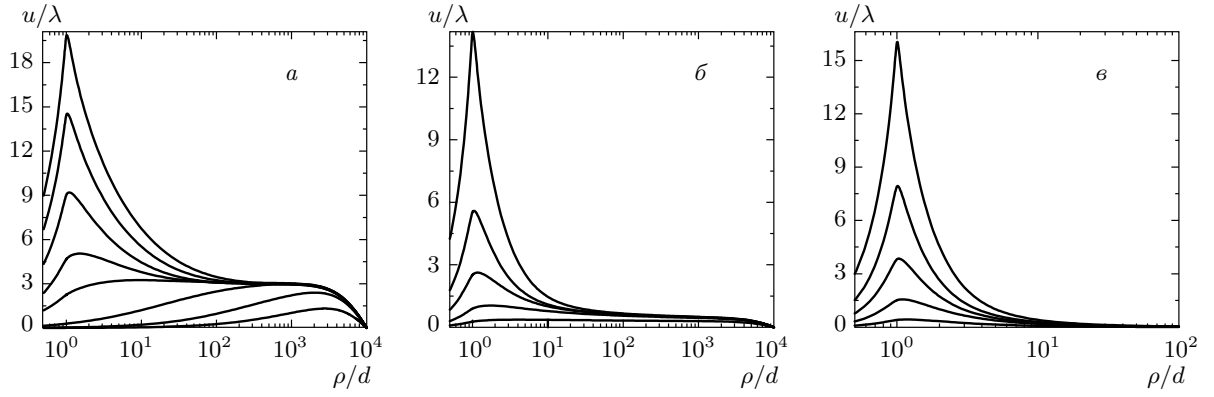
где точка обозначает дифференцирование по углу  $\theta$ . Это уравнение имеет однозначное, т. е. периодическое,  $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$ , решение лишь при дискретном наборе значений параметра  $\alpha$ . Порядок уравнения можно понизить, если искать  $f$  как функцию новой переменной  $\eta = \dot{f}/f$ . Тогда первый интеграл уравнения (4) находится элементарно, и его можно записать в виде

$$f^2(\eta^2 + \alpha^2)^\alpha \left(\eta^2 + \alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha\right)^{1-\alpha} = C, \quad (5)$$

где  $C$  — константа интегрирования. Для угла  $\theta$  имеем  $\theta = \int (f\eta)^{-1} df$ . Используя соотношение (5), получим

$$\theta = -\arctg \frac{\eta}{\alpha} - \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{(\alpha-2/3)\alpha}} \times \arctg \frac{\eta}{\sqrt{(\alpha-2/3)\alpha}}. \quad (6)$$

Константа интегрирования равна нулю, так как максимум функции  $f$ , очевидно, достигается при  $\theta = 0$ . При этом,  $\eta \propto \dot{f} = 0$ . Из симметрии дипольного распределения сил ясно, что смена знака функции  $f$



**Рис. 2.** Эволюция поля смещения  $u$  как функции радиуса при  $\theta = 0$  по мере роста приложенных сил:  $a$  — диполь,  $F/Ad = 0.005; 0.038; 20; 60; 100; 500; 1700; 4000$ ;  $b$  — квадруполь,  $F/Ad = 1; 5; 20; 100; 500; 5000$ ;  $v$  — гексаполь,  $F/Ad = 20; 100; 500; 2500; 15000$

должна происходить при  $\theta = \pm\pi/2$ . Согласно выражению (5), при этом  $\eta \rightarrow \mp\infty$ . Уравнение (6) сводится здесь к

$$\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1 - \alpha}{\sqrt{(\alpha - 2/3)\alpha}} \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

(стремлению  $\theta \rightarrow +\pi/2$  соответствует  $\eta \rightarrow -\infty$ ). Отсюда находим значение  $\alpha = (1 - 2\sqrt{7})/9$ .

*Мультиполюля*,  $\lambda = 0$ . Решение (5), (6) является однозначной функцией угла  $\theta$  при бесконечном дискретном наборе индексов

$$\alpha = \frac{-2n^2 + 2n + 1 - (n + 1)\sqrt{4n^2 + 2n + 1}}{3(2n + 1)}, \quad (8)$$

когда расстояние по углу между ближайшими, например, максимумами функции  $f$  равно  $2\pi/n$  (где  $n = 2m$ ). Такие поля соответствуют  $2m$ -польным распределениям сил вдоль линии, параллельной оси симметрии смектика.

Полученные нелинейные асимптотики верны, пока амплитуда смещения значительно превышает  $\lambda$ . Это условие нарушается на расстояниях

$$\rho \sim \rho^* \sim d(Fd^2/A\lambda^3)^{1/3|\alpha|},$$

и здесь становится необходим учет первого члена в уравнении равновесия (2). При этом требуется дополнительное граничное условие. В качестве такового выберем  $\Delta_{\perp} u = 0$  при  $\rho = R$ . Это естественное вариационное условие в случае свободной ориентации смектических слоев на стенках сосуда.

На рис. 2 представлены результаты численного решения задач о дипольном, квадрупольном и следующем по порядку, гексапольном, моментах в рамках

общего ( $\lambda \neq 0$ ) уравнения (2). Мы видим, что при достаточно большом воздействии имеются две макроскопические области различного поведения. На расстояниях  $d \ll \rho \ll \rho^*$  наблюдается рассмотренная выше ближняя асимптотика (3). На расстояниях же  $\rho^* \ll \rho \ll R$  реализуется дальняя асимптотика. Здесь поведение смещений для диполя, квадруполя и гексаполя различно: в случае диполя (рис. 2а) смещения не зависят от радиуса, в случае квадруполя (рис. 2б) смещения убывают медленно, в случае гексаполя (рис. 2в) и последующих мультиполей — быстро.

Для мультиполей, начиная с гексаполя, на расстояниях  $\rho \gg \rho^*$  амплитуда смещения мала по сравнению с  $\lambda$ . Тогда нелинейными эффектами можно пренебречь, и здесь реализуются стандартные мультипольные асимптотики ( $u \propto \cos(m\theta)\rho^{-m+2}$ , где  $m \geq 3$ ) линейного уравнения  $\Delta_{\perp}^2 u = 0$ .

В случаях же диполя и квадруполя нелинейность существенна на любых расстояниях.

*Диполь*,  $\lambda \neq 0$ . Характер поведения поля смещений на расстояниях  $\rho^* \ll \rho \ll R$ , наблюдаемый в численном счете (рис. 2а) указывает на возможность существования независимого от  $\rho$  решения  $u = \lambda f(\theta)$ . Для функции  $f$  получаем уравнение

$$\overset{\cdot\cdot\cdot}{f} + 4\ddot{f} - \frac{3}{2}\dot{f}^2\ddot{f} = 0, \quad (9)$$

которое можно проинтегрировать в квадратурах. Первый интеграл  $\dot{f} + 4f - f^3/2 = C_1$ . По симметрии задачи константа интегрирования  $C_1$  обращается в нуль. Вторым интеграл

$$\frac{\dot{f}^2}{2} + 2f^2 - \frac{f^4}{8} = C. \quad (10)$$

Введем вспомогательную переменную  $\varphi$ , такую что  $\dot{f} = -b \sin \varphi$ , где  $b$  — максимальное значение  $\dot{f}$ . Из соотношения (10) очевидно, что  $C = 2b^2 - b^4/8$ . Второй интеграл тогда можно записать в виде

$$\dot{\varphi}^2 = 4 - \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \sin^2 \varphi. \quad (11)$$

Откуда получаем третий интеграл задачи,

$$\theta = \frac{2}{\sqrt{16 - b^2}} F(\varphi, k), \quad (12)$$

где  $F(\varphi, k)$  — эллиптический интеграл

$$\int_0^\varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi,$$

$k = b/\sqrt{16 - b^2}$ . Угол  $\theta$  отсчитываем от точки максимума функции  $f$  (при этом  $\varphi = 0$ ). Наконец, четвертый интеграл равен

$$f = -b \int \sin \varphi d\theta = \ln \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - k \cos \varphi}. \quad (13)$$

Константа интегрирования здесь положена равной нулю в согласии с симметрией поля смещений, вызванных дипольным распределением силы.

Функция  $f$  меняет знак при  $\varphi = \pi/2$ . Для диполя это должно происходить при  $\theta = \pi/2$ . Соответственно, параметр  $b$  определяется соотношением

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{16 - b^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad (14)$$

и равен  $b \approx 2.691$ .

Отметим, что собственная функция  $f(\theta)$  дальней ( $\rho \gg \rho^*$ ) асимптотики, так же как и в случае ближней ( $\rho \ll \rho^*$ ) асимптотики (3), определяется в основном ( $\sim 95\%$ ) первой угловой гармоникой  $\cos \theta$ .

Обратим внимание на то, что найденное решение не только универсально, т. е. не зависит от величины воздействия (для его реализации необходимо лишь достаточно большое воздействие), но и не несет дипольного момента.

*Квадруполь*,  $\lambda \neq 0$ . Заметим, что не зависящих от радиуса решений, которые могли бы соответствовать высшим мультиполям, не существует. Дело в том, что минимальное значение правой части дисперсионного соотношения (14) равно  $\pi/4$ . Оно достигается при  $b \rightarrow 0$ , т. е. когда амплитуда решения стремится к нулю. Поэтому величина  $\pi/4$ , удовлетворяющая квадруполью, недостижима. Это обстоятельство, а также характер численного решения (см. рис. 2б) на расстояниях  $\rho^* \ll \rho \ll R$  указывают на возможность существования решения в виде

$$u = \lambda f(\theta) \ln^\alpha \frac{\rho}{\rho^*}. \quad (15)$$

При  $\alpha < 0$  (что естественно предполагать, поскольку в случае дипольного момента получилось  $\alpha = 0$ ) в главном приближении в уравнении (2) остается только линейный член

$$(\ddot{f} + 4\dot{f}) \frac{\lambda^3}{\rho^4} \ln^\alpha \frac{\rho}{\rho^*}. \quad (16)$$

Таким образом,  $f = C \cos 2\theta$ , где  $C$  — некоторая постоянная. Члены следующего приближения в линейном слагаемом уравнения равновесия есть

$$-8\alpha C \cos 2\theta \frac{\lambda^3}{\rho^4} \ln^{\alpha-1} \frac{\rho}{\rho^*}, \quad (17)$$

а в нелинейном слагаемом:

$$-3C^3 (\cos 2\theta - \cos 6\theta) \frac{\lambda^3}{\rho^4} \ln^{3\alpha} \frac{\rho}{\rho^*}. \quad (18)$$

Из условия сокращения членов пропорционально  $\cos 2\theta$ , находим индекс  $\alpha = -1/2$  и постоянную  $C = 2/\sqrt{3}$ . Для компенсации члена, пропорционального  $\cos 6\theta$ , в (18) необходимо учесть поправку, пропорциональную  $\lambda \cos 6\theta \ln^{-3/2}(\rho/\rho^*)$ , к функции (15). Таким образом, квадрупольное решение на расстояниях  $\rho \gg \rho^*$  представляется в виде ряда по обратным полуцелым степеням логарифма.

На расстояниях  $\rho \sim R$  описанные асимптотики для любых мультиполей нарушаются. Решения здесь подстраиваются под граничные условия на стенках сосуда.

Благодарим Е. А. Бренера и Е. И. Каца за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00483).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).
2. Е. А. Brenner and V. I. Marchenko, *Phys. Rev. E* **59**, R4752 (1999).
3. Е. А. Бренер, В. И. Марченко, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 446 (2007).
4. Е. А. Бренер, В. И. Марченко, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 153 (2009).
5. Е. А. Бренер, В. И. Марченко, Д. А. Пилипенко, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 761 (2009).