

ПРОБЛЕМА ПОВЫШЕНИЯ T_c СВЕРХПРОВОДНИКОВ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ

Ю. А. Кротов, И. М. Суслов

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117942, Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 июня 1994 г.,
после переработки 11 ноября 1994 г.

К проблеме вычисления T_c сложных соединений возможен подход со стороны пространственно неоднородных систем: сначала рассматривается структура из макроскопических блоков размером $L \gg a$ (a — межатомное расстояние), затем проводится экстраполяция $L \rightarrow a$. Из общей теоремы для уравнения Горькова следует, что значение T_c блочной структуры, вычисленное в пренебрежении переходным поведением всех физических величин на границах раздела, не может превышать максимального из значений T_c для материалов, составляющих структуру. Это ограничение снимается при учете поверхностных эффектов, чем обусловлена их важность для проблемы высокотемпературной сверхпроводимости. На основе полученных в [6, 7] общих формул исследуется поверхностный вклад в T_c для периодической структуры, состоящей из чередующихся слоев двух металлов 0 и 1 с квадратичными спектрами. Любые различия в спектрах металлов 0 и 1, т. е. различия a) в положениях дна зоны, б) продольных или в) поперечных масс, приводят к нетривиальной картине осцилляций T_c при изменении толщины d слоев материала 1. По зависимостям $T_c(d)$ определяется максимальное значение T_c , обсуждается его зависимость от параметров металлов 0 и 1 и выявляются факторы, благоприятствующие и препятствующие повышению T_c . Одновременно работа может рассматриваться как последовательная теория эффекта квантовых осцилляций T_c , впервые обсуждавшегося Каганом и Дубовским [14].

1. ВВЕДЕНИЕ

В идеале теория сверхпроводимости должна дать возможность вычисления температуры перехода T_c для произвольного вещества. Алгоритм такого вычисления *ab initio* — исходя лишь из знания входящих в соединение атомов и их расположения в пространстве — в принципе, известен (см., например, [1]), но требует громоздких численных расчетов для каждого конкретного вещества: поэтому поиск соединений с высоким T_c сводится к простому перебору, как при экспериментальном исследовании. В связи с этим возникает потребность в более грубом методе, который бы позволял получить качественную картину.

К проблеме вычисления T_c сложных соединений возможен подход со стороны пространственно неоднородных систем: например, вместо решетки из чередующихся атомов А и В (рис. 1а) рассматривается система макроскопических блоков материалов А и В (рис. 1б); размер блоков L считается большим по сравнению с межатомным расстоянием a , но в конце вычислений производится экстраполяция на границу области применимости $L \sim a$. При $L \gg a$ можно использовать информацию об объемных свойствах материалов А и В, что приводит к большой экономии вычислений (известно, что в расчетах *ab initio* основное компьютерное время тратится не на вычисление T_c , а на «построение» твердого тела из атомов).

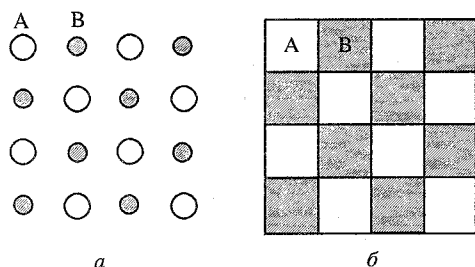


Рис. 1. Вместо решетки из атомов А и В (а) можно рассматривать систему из макроскопических блоков материалов А и В (б), делая в конце вычислений экстраполяцию $L \rightarrow a$

Для получения в таком подходе нетривиальных результатов требуется систематический анализ поверхностных эффектов. Дело в том, что значение $T_c \equiv T_c^{\text{vol}}$, полученное в пренебрежении переходным поведением всех физических величин на границах раздела, для любой блочной структуры типа изображенной на рис. 1б (независимо от количества входящих в нее материалов и формы блоков) лежит в интервале

$$T_{\min} \leq T_c^{\text{vol}} \leq T_{\max} \quad (1)$$

между минимальной и максимальной из объемных температур перехода материалов, составляющих структуру; в частности, T_c^{vol} не может превышать T_{\max} . Этот результат ясен из интуитивного представления о формировании в пространственно неоднородной системе эффективной константы взаимодействия λ , входящей в формулу БКШ $T_c \sim \omega_0 \exp(-1/\lambda)$, путем некоторого усреднения по объему: конкретные рецепты усреднения получены для частных случаев Купером [2], де Женем [3], Киржницем и Максимовым [4], одним из авторов [5]; фактически, неравенство (1) является следствием общей теоремы для уравнения Горькова (разд. 2)¹⁾.

На эвристическом уровне поверхностные эффекты можно учесть, предполагая, что на границе раздела материалов А и В (рис. 1б) имеется слой толщиной $\sim a$ из третьего материала; тогда усреднение λ по объему даст для T_c системы²⁾

$$T_c = T_c^{\text{vol}} + T_s \frac{a}{L}. \quad (2)$$

Проводя экстраполяцию $L \rightarrow a$, получим $T_c - T_c^{\text{vol}} \sim T_s$, и знание величины T_s позволяет судить, насколько вероятно повышение T_c системы по сравнению с T_{\max} . Разумеется, в таком подходе невозможно предсказывать T_c со сколько-нибудь серьезной точностью, но можно отделять перспективные ситуации (большие положительные T_s) от неперспективных и тем самым определять направление поиска.

Ниже рассматриваются системы с пространственной неоднородностью вдоль одной координаты, которые проще как для теоретического, так и для экспериментального исследований. Именно, пусть в массивный сверхпроводник 0 вводятся тонкие слои материала 1 толщиной d с расстоянием L между ними, причем $d \ll L \ll \xi_0$, где ξ_0 — длина

¹⁾Мы пренебрегаем зависимостью от координат частоты обрезания ω_0 , что оправдано в приближении слабой связи.

²⁾Заметим, что поверхностный вклад в T_c может не содержать малости $\sim a/L$, если происходит локализация сверхпроводящего параметра порядка на границах раздела [6, 7]. В этом случае при усреднении величины λ области, удаленные от границ, интегрируются с нулевым весом.

когерентности. Пусть сверхпроводник 0 имеет рекордное значение $T_c = T_{c0}$; поставим вопрос о возможности его повышения за счет введения заведомо «плохого» материала 1, т. е. при условии

$$V_1 N_1 \leq V_0 N_0, \quad (3)$$

где V_0, V_1 и N_0, N_1 — константы четырехфермионного взаимодействия и плотности состояния материалов 0 и 1. При $d \ll L$ для исследования поверхностных эффектов можно использовать полученные в [6, 7] формулы для T_c , следующие из уравнения Горькова без каких-либо предположений, кроме малости параметра d/L . Эти формулы использовались ранее для исследования локализации параметра порядка [6, 7], когерентного взаимодействия плоских дефектов [8], усиления сингулярностей в T_c по сравнению с сингулярностями плотности состояний [9].

Задача об исследовании функциональной зависимости T_c соединения от характеристик составляющих его элементов всерьез в литературе даже не ставилась ввиду ее очевидной сложности и отсутствия конструктивных идей. Предлагаемый подход позволяет существенно продвинуться в этом направлении, что продемонстрировано ниже на примере модели, в которой спектры материалов 0 и 1 являются квадратичными:

$$\varepsilon_0(k_{\parallel}, k_z) = \frac{k_{\parallel}^2}{2M} + \frac{k_z^2}{2m}, \quad \varepsilon_1(k_{\parallel}, k_z) = U + \frac{k_{\parallel}^2}{2M_1} + \frac{k_z^2}{2m_1}, \quad k_{\parallel} = (k_x, k_y) \quad (4)$$

(мы различаем продольные (M, M_1) и поперечные (m, m_1) массы, так как они по-разному входят в уравнения), а граничное условие для волновой функции поперечного движения $\varphi(z)$, возникающей при разделении переменных ($\Psi(r) = \exp(ik_{\parallel}r_{\parallel})\varphi(z)$, $r_{\parallel} = (x, y)$), имеет вид

$$\varphi'(z=0) - \varphi'(z=0) \frac{m}{m_1} = \kappa \varphi(0), \quad \varphi(z=0) = \varphi(z=0) \quad (5)$$

(если материалы 0 и 1 находятся при $z > 0$ и $z < 0$ соответственно); параметр κ описывает поверхностный потенциал на границе раздела, аппроксимируемый δ -функцией.

Если материал 1 является металлом, то T_c системы оказывается осциллирующей функцией d ; этот эффект квантовых осцилляций наблюдался на пленках с покрытием [10–12], в сэндвичах [10] и сверхрешетках [13] и теоретически рассматривался Каганом и Дубовским [14]. Как показано недавно авторами [15], качественная картина, представленная в работе [14], требует радикального пересмотра, а интерпретация экспериментов [10–12] должна проводиться на основе двух физических механизмов — интерференции де-Бройлевских волн, отраженных от двух плоских дефектов [8]³⁾, и интерференции на одном дефекте, фиксируемой скачком параметра порядка на другом [15]. Критика количественных аспектов работы [14] была дана ранее в [7]; заметим лишь, что вследствие игнорирования эффекта близости неконтролируемым образом теряется вклад $\sim d/L$ при исследовании эффекта $\sim a/L$. Настоящая работа претендует на последовательное описание эффекта квантовых осцилляций: показано, в частности, что к осцилляциям приводит любое различие в спектрах материалов 0 и 1, т. е. а) различие в положениях дна зоны ($U \neq 0$), различия б) поперечных ($m \neq m_1$) или в)

³⁾ Недавно получены экспериментальные свидетельства существования этого механизма [16].

продольных ($M \neq M_1$) масс, а также γ) наличие δ -образного потенциала на границе ($\kappa \neq 0$). Для простоты и наглядности в разд. 4–6 мы исследуем роль каждого из факторов а–в по отдельности; наличие δ -образного потенциала на границе уже рассмотрено ранее [8]. Значение эффекта квантовых осцилляций для рассматриваемой проблемы состоит в том, что перспектива повышения T_c связана, как правило, с первым максимумом осцилляций и значение T_c в этом максимуме удобно использовать в качестве меры поверхностного вклада в T_c (разд. 7).

2. НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ T_c^{vol}

Если для описания пространственно неоднородного сверхпроводника приняты предположения, характерные для теории БКШ (точечное взаимодействие с обрезанием по частотам), то T_c определяется условием появления нетривиального решения уравнения Горькова [17]

$$\Delta(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) \int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (6)$$

где $\Delta(\mathbf{r})$ — сверхпроводящий параметр порядка, $V(\mathbf{r})$ — зависящая от координат константа четырехфермионного взаимодействия, $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — сверхпроводящее ядро, которое в отсутствие магнитных эффектов является положительным и симметричным, а также удовлетворяет правилу сумм [3, 17]

$$\int d\mathbf{r}' K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = N(\mathbf{r}) \ln \frac{1.14\omega_0}{T}, \quad (7)$$

где $N(\mathbf{r})$ — локальная плотность состояний

$$N(\varepsilon, \mathbf{r}) = \sum_n |\Psi_n(\mathbf{r})|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_n) \quad (8)$$

на уровне Ферми, а $\Psi_n(\mathbf{r})$ и ε_n — одночастичные собственные функции и собственные значения. Если безразмерная константа взаимодействия определена соотношением $\lambda(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})N(\mathbf{r})$, то для T_c справедлива формула БКШ $T_c = 1.14\omega_0 \exp(-1/\lambda_{\text{eff}})$ с константой λ_{eff} , удовлетворяющей неравенству

$$\min \lambda(\mathbf{r}) \leq \lambda_{\text{eff}} \leq \max \lambda(\mathbf{r}). \quad (9)$$

Для доказательства (9) проведем дискретизацию системы, разбив ее на малые блоки объемом Ω и отмечая индексами i и j значения, относящиеся к i -у и j -у блокам. Полагая

$$K_{ij} = L_{ij} \ln \frac{1.14\omega_0}{T}, \quad \frac{1}{\lambda} = \ln \frac{1.14\omega_0}{T}, \quad (10)$$

перепишем (6) в виде

$$\lambda \Delta_i = V_i \Omega \sum_j L_{ij} \Delta_j. \quad (11)$$

Нетрудно понять, что $\lambda_{\text{эф}}$ равно максимальному собственному значению уравнения (11). Рассмотрим отдельно два случая.

а) Если $V(\mathbf{r}) \geq 0$ для всех \mathbf{r} , то $\lambda_{\text{эф}}$ — максимальное собственное значение положительной матрицы, лежащее в интервале между минимальной и максимальной из построчных сумм [18]:

$$\min_i \Omega V_i \sum_j L_{ij} \leq \lambda_{\text{эф}} \leq \max_i \Omega V_i \sum_j L_{ij}. \quad (12)$$

Возвращаясь к непрерывным переменным и учитывая (7), получим (9).

б) Пусть $V(\mathbf{r})$ — знакопеременная функция. Воспользуемся теоремой для обобщенной задачи на собственные значения $\hat{A}y = \lambda \hat{B}y$ (см. [19], стр. 439, 442): если \hat{A} и \hat{B} — эрмитовы операторы, причем \hat{B} — положительно определенный, то прибавление к \hat{A} положительно определенного эрмитова оператора не может уменьшить ни одного из собственных значений. Приведем (11) к указанному виду с помощью замены

$$y_i = \sum_j L_{ij} \Delta_j,$$

тогда операторы \hat{A} и \hat{B} определяются матрицами $\| \Omega V_i \delta_{ij} \|$ и $\| L_{ij}^{-1} \|$. Положим $\tilde{V}_i = \max(V_i, 0)$; для задачи (11) с \tilde{V}_i вместо V_i максимальное собственное значение лежит в интервале от нуля до $\max \tilde{V}_i N_i = \max \lambda_i$, но при переходе от V_i к \tilde{V}_i оно не может уменьшиться, так что $\lambda_{\text{эф}} \leq \max \lambda_i$. Нижняя оценка для $\lambda_{\text{эф}}$ в данном случае не актуальна, так как минимально возможное значение $T_c = 0$ является допустимым в силу допустимости $\lambda_{\text{эф}} = 0$.

Для блочной структуры, введенной в разд. 1, в пренебрежении переходным поведением вблизи границ раздела функция $\lambda(\mathbf{r})$ принимает лишь дискретные значения λ_i , равные объемным значениям для материалов, составляющих структуру; поэтому $\lambda_{\text{эф}}$ лежит между минимальным и максимальным значениями λ_i и для T_c справедливо неравенство (1).

3. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ВКЛАДА В T_c

Рассматривая слои материала I как плоские дефекты, можно воспользоваться результатами работ [6, 7]. В отсутствие вблизи плоского дефекта связанных состояний для T_c справедлива формула

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{T_c - T_{c0}}{T_{c0}} = \frac{1}{\lambda_0^3 L} \int dz V_0 N(z) [V(z)N(z) - V_0 N_0], \quad (13)$$

где $\lambda_0 = V_0 N_0$, а $V(z)$ и $N(z)$ — введенные выше функции $V(\mathbf{r})$ и $N(\mathbf{r})$, зависящие лишь от z вследствие одномерности геометрии; интегрирование проводится по области, содержащей один плоский дефект [6, 7].

При наличии вблизи плоского дефекта m связанных состояний (для фиксированного k_{\parallel}) T_c определяется условием разрешимости системы $m+1$ уравнений (см. формулы (4), (5) работы [8]). Если все связанные состояния распространяются по материалу

1, т. е. принадлежат квазидискретному спектру, то для T_c можно получить явное выражение [7]

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\lambda_0^3 L} \left[\lambda_{cc} d + \frac{\lambda_1 - \lambda^*}{\lambda_0 - \lambda^*} \left(\lambda_{cq} d + \frac{V_0}{V_1} \lambda_{qc} a \right) + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda^*}{\lambda_0 - \lambda^*} \right)^2 \frac{V_0}{V_1} \lambda_{qq} a \right], \quad (14)$$

где параметры λ_{cc} , λ_{cq} , λ_{qc} , λ_{qq} (см. формулы (29) работы [7]) определяются функциями $N_c(z)$ и $N_{q1}(z)$, входящими в разбиение

$$N(z) = N_c(z) + N_{q1}(z) \quad (15)$$

и определенными формулой (8), содержащей соответственно лишь состояния непрерывного или квазидискретного спектра; функции $N_c(z)$ и $N_{q1}(z)$ в материале 0 имеют значения N_0 и нуль, в материале 1 — значения N^{**} и N^* ($N_1 = N^* + N^{**}$) и меняются на границах раздела на масштабах a_c и a_{q1} соответственно; $\lambda_1 = V_1 N_1$, $\lambda^* = V_1 N^*$. Формула (14) становится несправедливой при $\lambda_0 \approx \lambda^*$, что связано с описанным в [5] «переходом Андерсона», при котором происходит локализация параметра порядка в слоях материала 1, так что при $\lambda^* > \lambda_0$ [7]

$$T_c = T^* \left(1 + \frac{\lambda_{qq} a}{\lambda^{*3} d} \right), \quad (16)$$

где $T^* = 1.14 \omega_0 \exp(-1/\lambda^*)$. Анализ показывает, что формула (16) остается справедливой при $\lambda^* < \lambda_0$, если выражение в правой части превышает T_{c0} на величину $\sim \sqrt{d/L}$; формула (14) имеет место, если $d \gg a_c, a_{q1}$ и правая часть (16) меньше T_{c0} на величину $\sim \sqrt{d/L}$. В случае $a_c \gg a_{q1}$ для описания области $a_{q1} \ll d < a_c$ вместо (14) следует использовать более общую формулу

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\lambda_0^3 L} \left[\lambda_{cc} d + \frac{\bar{\lambda}_c}{\lambda_0 - \lambda^*} \lambda_{cq} d + \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\lambda_0 - \lambda^*} \right)^2 \frac{V_0}{V_1} \lambda_{qq} a \right], \quad (17)$$

получаемую аналогично (14) и справедливую при $d \gg a_{q1}$. Величина

$$\bar{\lambda}_c = \lambda_0 (\lambda^*)^{-1} \int dz V_1 K_{q1}(0, z) V(z) N_c(z)$$

не выражается только через $N_{q1}(z)$, $N_c(z)$ ($K_{q1}(z, z')$ — ядро, построенное из состояний квазидискретного спектра [7]), хотя обычно достаточно результата

$$K_{q1}(0, z) = \frac{N_{q1}(z)}{d} \ln \left(1.14 \frac{\omega_0}{T} \right) + O \left(\frac{a_{q1}}{d} \right),$$

следующего из правила сумм (7).

В формулах (13) и (14) можно в общем виде выделить линейный по d/L вклад, соответствующий введенной выше величине T_c^{vol} и совпадающий с результатами работы [5]; оставшийся вклад $\sim a/L$ представляет собой поверхностный эффект и является предметом исследования настоящей работы.

Функции $N_c(z)$ и $N_{q1}(z)$ нужно знать лишь в окрестности плоских дефектов, поэтому достаточно рассмотреть сэндвич, содержащий материал 1 при $|z| < d/2$ и материал

0 при $d/2 < |z| < L/2$ с нулевыми граничными условиями в точках $z = \pm L/2$ ⁴⁾ и граничными условиями типа (5) в точках $z = \pm d/2$, после чего вычисления аналогичны проведенным в [8]. Функцию $V(z)$ считаем кусочно-постоянной, принимающей значение V_1 при $|z| < d/2$ и V_0 при $|z| > d/2$, предполагая, что V_1 удовлетворяет неравенству (3); поскольку увеличение V_1 при неизменном распределении электронной плотности приводит к возрастанию T_c ⁵⁾, максимальная температура перехода достигается при $N_1 V_1 = N_0 V_0$, т.е. при $\lambda_1 = \lambda_0$, когда объемный эффект отсутствует и δT_c определяется чисто поверхностным вкладом; поэтому при графической иллюстрации результатов мы будем уделять особое внимание случаю $\lambda_1 = \lambda_0$.

В принятых предположениях T_c определяется перераспределением электронной плотности: это представляется естественным, так как именно такое перераспределение происходит при образовании химической связи. Предлагаемый подход — это своеобразный метод описания химической связи.

4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАЗЛИЧНЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ ДНА ЗОНЫ ($U \neq 0$, $m = m_1$, $M = M_1$, $\kappa = 0$)

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением металлических прослоек. Под ϵ_F в дальнейшем понимается энергия Ферми, отсчитанная от дна зоны материала 0, а под k_F и q_F — поперечные фермиевские импульсы материалов 0 и 1.

4.1. Случай $\epsilon_F - U \ll \epsilon_F$

При $U > 0$ одночастичные волновые функции либо распространяются по всей системе (индекс A), либо распространяются в материале 0, но затухают при распространении в глубь материала 1 (индекс B); в соответствии с этим для $N(z)$ удобно провести разбиение

$$N(z) = N_A(z) + N_B(z), \quad (18)$$

где $N_A(z)$ и $N_B(z)$ определяются формулами

$$N_A(z) = \frac{M}{(2\pi)^2} \int_0^{q_F} dq \frac{q}{k} H(k, q, z) \Big|_{k=\sqrt{k_0^2+q^2}}, \quad (19)$$

$$N_B(z) = \frac{M}{(2\pi)^2} \int_0^{k_0} dq \frac{q}{k} H(k, iq, z) \Big|_{k=\sqrt{k_0^2-q^2}}, \quad (20)$$

где

$$k_0 = \sqrt{2mU}, \quad q_F = \sqrt{k_F^2 - k_0^2}, \quad k_F = \sqrt{2m\epsilon_F}, \quad (21)$$

⁴⁾ Вид граничных условий в точках $z = \pm L/2$ существен лишь для поведения $N(z)$ в окрестности этих точек.

⁵⁾ Формальное доказательство увеличения T_c при замене $V(\mathbf{r})$ на $V(\mathbf{r}) + \Delta V(\mathbf{r})$ с $\Delta V(\mathbf{r}) \geq 0$ ясно из разд. 2.

а функция $H(k, q, z)$ имеет вид

$$H(k, q, z) = \begin{cases} 2k^2 \left[\frac{\cos^2(qz)}{u^+(k, q)} + \frac{\sin^2(qz)}{v^+(k, q)} \right], & |z| < \frac{d}{2}, \\ 2 + \cos(2kz') \left[\frac{u^-(k, q)}{u^+(k, q)} + \frac{v^-(k, q)}{v^+(k, q)} \right] + \\ + kq \sin(2kz') \sin(qd) \left[-\frac{1}{u^+(k, q)} + \frac{1}{v^+(k, q)} \right], & z' = |z| - \frac{d}{2} > 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$u^\pm(k, q) = k^2 \cos^2(qd/2) \pm q^2 \sin^2(qd/2),$$

$$v^\pm(k, q) = k^2 \sin^2(qd/2) \pm q^2 \cos^2(qd/2).$$

В случае $\varepsilon_F - U \ll \varepsilon_F$ параметр q_F/k_0 мал и подынтегральное выражение для $N_A(z)$ локализовано вблизи точек $q_s = \pi s/d$ (при вычислениях удобно сложить дроби в (22)) и может быть аппроксимировано набором δ -функций; в низшем порядке по q_F/k_0 получим

$$N_A(z) = \begin{cases} N_0 \frac{\pi}{k_F d} \sum_{s=1}^Q [1 - (-1)^s \cos(2q_s z)], & |z| < d/2, \\ 0, & |z| > d/2, \end{cases} \quad (23)$$

где $Q = [q_F d/\pi]$, $[\dots]$ — целая часть числа. Подставляя разбиение (18) в формулу (13), получим интегралы от линейных и билинейных комбинаций $N_A(z)$ и $N_B(z)$. Интегралы от $N_A(z)$ и $N_B^2(z)$ вычисляются с помощью выражения (23): интеграл от $N_A(z)N_B(z)$ по области $|z| < d/2$ мал (так как $N_A(z)$ обращается в нуль при $z = \pm d/2$, возрастая в глубь материала 1 на масштабе q_F^{-1} до величины $\sim N_0 q_F d/k_0$, а $N_B(z)$ убывает от величины $\sim N_0$ при $z = \pm d/2$ до нуля на масштабе k_0^{-1}), а по области $|z| > d/2$ — обращается в нуль в силу (23); интегралы от $N_B(z)$ и $N_B^2(z)$ могут быть обезразмерены и определены численно. В результате для T_c получим

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right) q_F d + f \left(\frac{q_F d}{\pi} \right) + \frac{V_1}{V_0} P_1(k_0 d) + P_2(k_0 d) \right], \quad (24)$$

где линейный по d член согласуется с результатами работы [5],

$$f(x) = \pi \{x\} + \pi \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left(\frac{1}{2} - 2\{x\} + \frac{2\{x\} - 1}{2x} \{x\} \right) \quad (25)$$

($\{\dots\}$ — дробная часть числа), а функции $P_1(x)$ и $P_2(x)$ показаны на вставке к рис. 2а и имеют следующие асимптотики:

$$P_1(x) = \begin{cases} x, & x \ll 1 \\ 2\pi/15, & x \gg 1 \end{cases}, \quad P_2(x) = \begin{cases} -3x/2, & x \ll 1 \\ -7\pi/15, & x \gg 1 \end{cases}. \quad (26)$$

Таким образом, зависимость T_c от d содержит: а) линейный по d вклад, б) осцилляции с периодом πq_F^{-1} , имеющие пилообразную форму из-за малости коэффициента прозрачности границ раздела (см. [8]); в) переходное поведение на масштабе $k_0^{-1} \approx k_F^{-1}$.

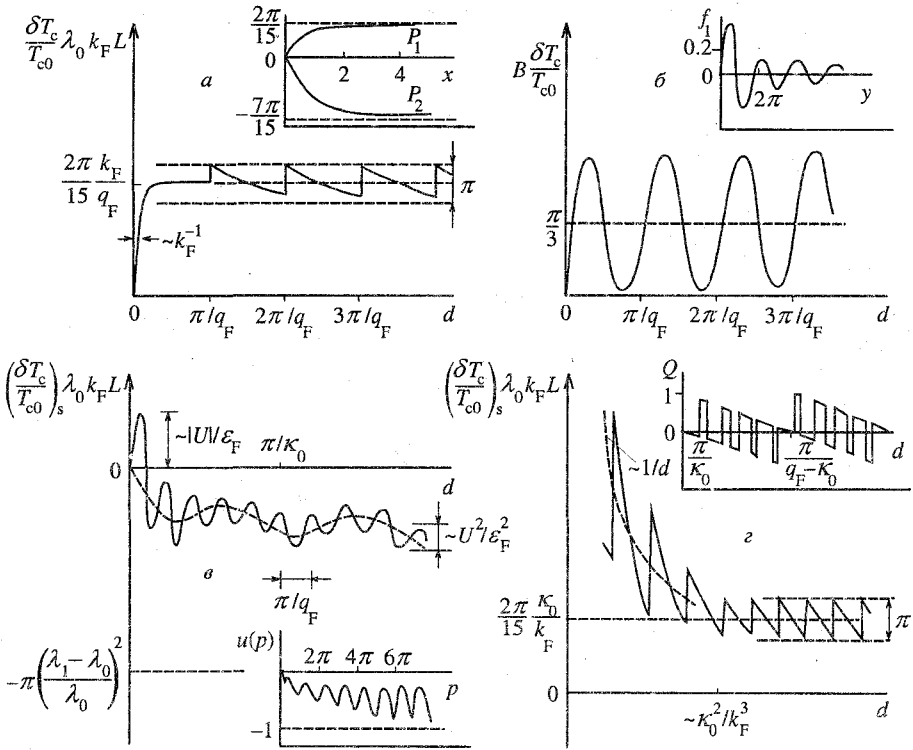


Рис. 2. Зависимость T_c от d для материалов 0 и 1, различающихся положением дна зоны: $a - \epsilon_F - U \ll \epsilon_F, \lambda_1 = \lambda_0$; $b - 0 < U \ll \epsilon_F, \lambda_1 = \lambda_0, B = 16\epsilon_F^2 U^{-2} \lambda_0 k_F L$; $c - U < 0, |U| \ll \epsilon_F, \lambda_1 < \lambda_0$; $d - U < 0, |U| \ll \epsilon_F, \lambda_1 = \lambda_0$. На вставках -- функции $P_1(x), P_2(x), f_1(y), u(p), Q(d)$, входящие в формулы (24), (32), (43), (47), (48)

При $\lambda_1 = \lambda_0$ имеем $V_0/V_1 = k_F/q_F \gg 1$, так что переходное поведение определяется функцией $P_1(x)$, а амплитуда осцилляций мала по сравнению с постоянным вкладом (рис. 2a); максимальное значение T_c в главном порядке равно

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_{\max} = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \frac{2\pi}{15} \sqrt{\frac{\epsilon_F}{\epsilon_F - U}} \quad (27)$$

и достигается во всей области $d \gtrsim k_F^{-1}$.

4.2. Случай $0 < U \ll \epsilon_F$

Локальная плотность состояний по-прежнему определяется формулами (18)–(22), но теперь $k_0 \ll k_F \ll q_F$. Проведем для $N_A(z)$ разбиение

$$N_A(z) = \begin{cases} 2q_F M / (2\pi)^2 + F(z) + G(z), & |z| < d/2 \\ (2k_F - 2k_0) M / (2\pi)^2 + F(z) + G(z), & |z| > d/2 \end{cases} \quad (28)$$

где

$$F(z) = \begin{cases} \frac{M}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \left[\frac{q}{k} H(k, q, z) - 2 \right]_{k=\sqrt{k_0^2+q^2}}, & |z| < \frac{d}{2} \\ \frac{M}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{q}{k} [H(k, q, z) - 2]_{k=\sqrt{k_0^2+q^2}}, & |z| > \frac{d}{2} \end{cases}, \quad (29)$$

а $G(z)$ определяется аналогичными выражениями с обратным знаком и интегралами от q_F до бесконечности. Методом контурного интегрирования можно показать (см. Приложение), что

$$F(z) = \begin{cases} -N_B(z), & |z| < d/2 \\ 2k_0 M / (2\pi)^2 - N_B(z), & |z| > d/2 \end{cases}, \quad (30)$$

откуда

$$N(z) = \begin{cases} N_1 + G(z), & |z| < d/2 \\ N_0 + G(z), & |z| > d/2 \end{cases}. \quad (31)$$

В выражении для $G(z)$ во всей области интегрирования $q \gg k_0$, и можно провести разложение по k_0/q ; подставляя (42) в (21) (при этом $G^2(z)$ представляется в виде двойного интеграла) и интегрируя по z , получим для T_c

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right) q_F d + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right) \frac{U}{2\varepsilon_F} f_1(2q_F d) + \frac{U^2}{16\varepsilon_F^2} f_2(2q_F d) \right], \quad (32)$$

где функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ определяются выражениями

$$f_1(y) = y^2 \int_y^\infty \frac{\sin x}{x^3} dx, \quad (33)$$

$$f_2(y) = \left(\frac{2\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right) \sin y + \frac{\pi}{3} + \frac{4 \cos y}{y} - (12y^2 + \pi y^3) \int_y^\infty \frac{\cos x}{x^4} dx + 2y^3 \int_y^\infty \frac{\sin x}{x^4} \ln \frac{x-y}{x+y} dx$$

и имеют асимптотики

$$f_1(y) = \begin{cases} y, & y \ll 1 \\ \frac{\cos y}{y}, & y \gg 1 \end{cases}, \quad f_2(y) = \begin{cases} (2\lambda_1/\lambda_0 + 1)y, & y \ll 1 \\ \frac{\pi}{3} + \left(\frac{2\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right) \sin y, & y \gg 1 \end{cases}. \quad (34)$$

Зависимость T_c от d содержит линейный член в соответствии с [5], затухающие осцилляции $\sim U/\varepsilon_F$ и незатухающие осцилляции $\sim (U/\varepsilon_F)^2$. Для существенно различных λ_1 и λ_0 функцию $f_2(y)$ можно заменить ее асимптотикой при $y \gg 1$, а при $\lambda_1 \approx \lambda_0$ в ней

можно положить $\lambda_1 = \lambda_0$ ⁶⁾. Зависимость T_c от d при $\lambda_1 = \lambda_0$, определяемая функцией $f_2(y)$, и функция $f_1(y)$ показаны на рис. 2б; в случае $\lambda_1 = \lambda_0$ первый максимум имеет место при $d = 1.1q_F^{-1}$, а значение T_c в нем находится из соотношения

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_{\max} = 0.13 \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \left(\frac{U}{\varepsilon_F}\right)^2 \quad (35)$$

4.3. Случай $U < 0$, $|U| \ll \varepsilon_F$

При $U < 0$ имеются состояния как непрерывного, так и квазидискретного спектров, поэтому для $N(z)$ справедливо разбиение (15), где

$$N_c(z) = \frac{M}{(2\pi)^2} \int_{\kappa_0}^{q_F} dq \frac{q}{k} H(k, q, z) \Big|_{k=\sqrt{q^2-\kappa_0^2}} \quad (36)$$

с $\kappa_0 = \sqrt{2m|U|}$ и $q_F = \sqrt{k_F^2 + \kappa_0^2}$, а для $N_{ql}(z)$ имеем

$$N_{ql}(z) = \sum_s N_{2D}^s \frac{k_s}{k_s d + 2} \begin{cases} [1 - (-1)^s \cos(2q_s z)], & |z| < d/2 \\ \frac{2q_s^2}{k_s^2 + q_s^2} \exp(-2k_s z'), & z' = |z| - \frac{d}{2} > 0 \end{cases} \quad (37)$$

где q_s — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \left[\frac{q_s d}{2} + \frac{\pi(s+1)}{2} \right] = \frac{k_s}{q_s}, \quad k_s = \sqrt{\kappa_0^2 - q_s^2}, \quad (38)$$

лежащие в интервале от нуля до κ_0 , а N_{2D}^s — плотность состояний на уровне Ферми s -й двумерной зоны, равная в данном случае $M/2\pi$. Как в п. 4.2, положим

$$N_c(z) = \begin{cases} N_1 - N^* + F(z) + G(z), & |z| < d/2 \\ N_0 + F(z) + G(z), & |z| > d/2 \end{cases} \quad (39)$$

где функция $F(z)$ определена выражениями типа (29) с интегрированием от κ_0 до бесконечности и $k = \sqrt{q^2 - \kappa_0^2}$, а $G(z)$ — аналогичными выражениями с обратным знаком и интегрированием от q_F до бесконечности. Методом контурного интегрирования доказывается (см. Приложение), что

$$F(z) = \begin{cases} N^* - N_{ql}(z), & |z| < d/2 \\ -N_{ql}(z), & |z| > d/2 \end{cases} \quad (40)$$

и для $N(z)$ по-прежнему справедлив результат (31).

Вычисление T_c проводится на основе формул (4), (5) работы [8], в которых $\lambda_{00} \sim \lambda_{0s} \sim \lambda_{s0} \sim 1$, $\lambda_{s,s'} \sim a/r_0$ для $s, s' \neq 0$ в силу локализации собственных функций

⁶⁾ В соответствии с этим различие между λ_1 и λ_0 сохранено в (33) лишь в затухающей части $f_2(y)$; в дальнейшем полагаем $\lambda_1 = \lambda_0$ в членах, существенных лишь при $\lambda_1 \approx \lambda_0$, не делая специальных оговорок.

$\varphi_s(z)$ на масштабе $r_0 \sim \max(d, \kappa_0^{-1})$. Проводя разложение по $T_c - T_{c0}$ и пренебрегая $\lambda_{ss'}$ с $s, s' \neq 0$, получим

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{L} \left\{ \frac{1}{\lambda_0^3} \int dz V_0 N(z) [V(z)N(z) - V_0 N_0] + \sum_{s=1}^m V_0 N_{2D}^s \frac{\lambda_{s0}^2}{\lambda_0^4} \right\}. \quad (41)$$

Функция $G(z)$ в (31) — та же, что в случае $U > 0$, и первый член в фигурных скобках (41) дает результат (32). Для λ_{s0} в главном порядке по κ_0/k_F получим

$$\lambda_{s0} = (\lambda_1 - \lambda_0) \int_{-d/2}^{d/2} dz |\varphi_s(z)|^2 \quad (42)$$

(можно пренебречь функцией $G(z)$ из-за ее локализации вблизи $z = \pm d/2$ на масштабе κ_F^{-1}). Подставляя выражения для $\varphi_s(z)$, для поверхностного вклада в T_c после выделения линейного по d члена получим

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}} \right)_s = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right) \frac{U}{2\varepsilon_F} f_1(2q_F d) + \frac{U^2}{16\varepsilon_F^2} f_2(2q_F d) + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right)^2 \pi u \left(\frac{\kappa_0 d}{2} \right) \right], \quad (43)$$

функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — те же, что в (32), а $u(p)$ (см. вставку к рис. 2в) определяется как

$$u(p) = -\frac{2p}{\pi} + \sum_s \left(\frac{py_s + y_s^2}{1 + py_s} \right)^2, \quad (44)$$

где $y_s = \sqrt{1 - x_s^2}$, $x_s = q_s/\kappa_0$, и имеет асимптотики

$$u(p) = \begin{cases} -2p/\pi + O(p^4), & p \ll 1 \\ -\{2p/\pi\}, & p \gg 1 \end{cases}. \quad (45)$$

Из (43) и рис. 2в ясно, что в отличие от предыдущего случая кроме осцилляций с периодом π/q_F имеется осциллирующая составляющая с периодом π/κ_0 . Происхождение двух периодов осцилляций поясняется на рис. 3. Заштрихованная область $\varepsilon > k_{\parallel}^2/2M$ соответствует непрерывному спектру материала 0. Спектр материала 1 лежит в области $\varepsilon > U + k_{\parallel}^2/2M_1$, и при малых d состоит из двумерных зон — уровней размерного квантования, зависящих от k_{\parallel} ; уровни являются истинными вне области непрерывного спектра и уширенными внутри ее. При росте d уровни размерного квантования сгущаются: период π/q_F соответствует прохождению очередного уширенного уровня через энергию Ферми (прохождению точки A через A_0); второй период (равный π/κ_0 для $M = M_1$) соответствует превращению очередного уширенного уровня в истинный при $\varepsilon = \varepsilon_F$, т. е. прохождению точки B через B_0 .

При $\lambda_1 = \lambda_0$ зависимость T_c от d оказывается такой же, как в предыдущем случае; соответственно, для максимального значения T_c справедлив результат (35).

4.4. Случай $U < 0$, $|U| \gg \varepsilon_F$

В этом случае $N^* - N_1 \ll N_1$, так что $T^* \approx T_{c1}$, и в силу положительности величины $\lambda_{q\bar{q}}$ (см. ниже) при малых d имеется область применимости формулы (16) для

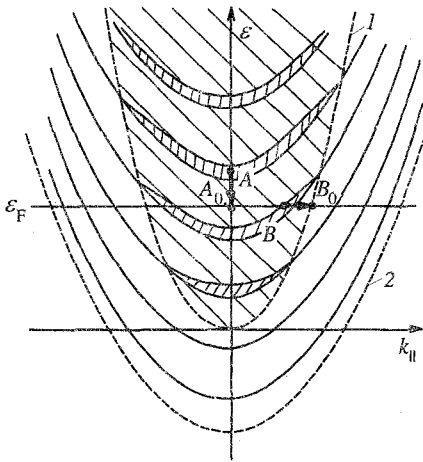


Рис. 3. Область $\epsilon > k_{||}^2/2M$ выше кривой 1 (заштрихована) соответствует непрерывному спектру материала 0. В области $\epsilon > U + k_{||}^2/2M_1$ выше кривой 2 лежит спектр материала 1, состоящий из двумерных зон — уровней размерного квантования, зависящих от $k_{||}$; уровни являются истинными ниже кривой 1 и уширенными выше ее. Два периода осцилляций соответствуют прохождению точки A через A_0 и точки B через B_0 для очередной двумерной зоны

$T_{c1} < T_{c0}$; при этом возникает любопытная ситуация: параметр порядка «уходит» из рекордного сверхпроводника 0 в «плохой» сверхпроводник 1. Это связано с тем, что состояния, локализованные в материале 1, ведут себя как пленка в диэлектрическом окружении; из-за большой плотности состояний $N^* = N_0\kappa_0/k_F \gg N_0$ и малой константы V_1 туннелирование электронов в материал 0 с большим значением V_0 повышает эффективную температуру перехода «пленки» выше T_{c0} , что и является условием локализации параметра порядка: это происходит при $d \gtrsim d_c \sim k_F^{-1}(\lambda_0 - \lambda^*)^{-1}$. При $d \lesssim d_c$ справедлива формула (16), при $d \gg d_c$ — формула (14); в области $d \sim d_c$ из-за осциллирующего поведения λ_{qq} происходит попеременная локализация и делокализация параметра порядка при изменении d .

Из выражений (15), (36), (37) следует, что $N_{q1}(z)$ меняется вблизи границы раздела на масштабе κ_0^{-1} от нуля до N^* . Поведение функции $N_c(z)$ более сложно: при уменьшении $|z|$ она меняется от N_0 до $N_c(d/2)$ на масштабе k_F^{-1} , затем от $N_c(d/2)$ до $N^{**} \approx N_0 k_F / 2\kappa_0$ на масштабе κ_0/k_F^2 ; величина $N_c(d/2)$ имеет порядок N^{**} при $d \gtrsim \kappa_0/k_F^2$ и осциллирует от нуля до $\min\{N_0, N^*/\kappa_0 d\}$ при $d \lesssim \kappa_0/k_F^2$. Будем иметь в виду случай $\lambda_1 \sim \lambda_0$, т.е. $V_0/V_1 \sim \kappa_0/k_F$.

Для вычисления λ_{qq} подставим (37) в формулу (29) работы [7], представляя $N_{q1}(z)^2$ в виде двойной суммы; вклад $\sim n$ (где n — число квазилокальных уровней) нужно выделить точно — он дает осциллирующую пилообразную зависимость. Для вычисления оставшейся части $O(n^0)$ при $d \gg a_{q1} \sim \kappa_0^{-1}$ в (37) можно перейти от суммирования к интегрированию. В результате

$$\lambda_{qq} a = \pi \lambda^{*2} \frac{V_1}{V_0} \left[\frac{2}{15} - \frac{V_1}{V_0} \left\{ \frac{\kappa_0 d}{\pi} \right\} \right] \kappa_0^{-1}. \tag{46}$$

С учетом свойств $N_c(z)$ и $N_{q1}(z)$ параметры λ_{cq} , λ_{qc} , λ_{cc} при $k_F d \gg 1$ определяются интегралом

$$\int_{|z| < d/2} dz [N_c(z) - N^{**}] = N_0 \pi k_F^{-1} Q(d), \quad Q(d) = \left\{ \frac{\kappa_0 d}{\pi} \right\} - \left\{ \frac{q_F d}{\pi} \right\}. \tag{47}$$

Для его вычисления заметим, что при $\kappa_0 \gg k_F$ пределы интегрирования в (36) оказываются близкими и можно разложить по $q - \kappa_0$ все функции, кроме тригонометрических;

локализация подынтегрального выражения вблизи точек $q_s = \pi s/d$ позволяет аппроксимировать его набором δ -функций. Для T_c в области $d \lesssim d_c$ получим (16) с λ_{qq} из (46), а в области $d \gg d_c$

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_s = \frac{\pi}{\lambda_0 k_F L} \left[\left(\frac{\lambda_1 - \lambda^*}{\lambda_0 - \lambda^*}\right)^2 \left(\frac{2}{15} \frac{\kappa_0}{k_F} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left\{\frac{\kappa_0 d}{\pi}\right\}\right) + \left(2 \frac{\lambda_1 - \lambda^*}{\lambda_0 - \lambda^*} - 1\right) Q(d) \right]. \quad (48)$$

В силу того, что $\lambda_1 - \lambda^* \sim k_F^2/\kappa_0^2$, использование полной формулы (48) требуется лишь при $\lambda_0 \approx \lambda_1$; для $\lambda_0 - \lambda_1 \sim 1$ она упрощается:

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_s = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} [-\pi Q(d)], \quad d \gg d_c. \quad (49)$$

При $\lambda_0 - \lambda_1 \gtrsim k_F/\kappa_0$ имеем $d_c \lesssim a_c \sim \kappa_0/k_F^2$, и требуется рассмотрение области $d_c \lesssim d \lesssim a_c$, где формула (14) неприменима; использование более общей формулы (17) приводит к тому же результату (49), так как в (17) можно сохранить лишь член с λ_{cc} , поскольку $\bar{\lambda}_c \sim (\kappa_0 d)^{-1}$.

На рис. 2г представлена зависимость T_c от d для $\lambda_1 = \lambda_0$, а на вставке — функция $Q(d)$, определяющая $T_c(d)$ для $\lambda_0 - \lambda_1 \sim 1$. При больших d и $\lambda_1 \neq \lambda_0$ в соответствии с качественными соображениями, изложенными в предыдущем разделе, осцилляции T_c представляют собой сумму двух периодических функций с периодами π/q_F и π/κ_0 ; из-за близости периодов возникает характерная картина биений. При $\lambda_1 = \lambda_0$ осциллирующая компонента с периодом π/κ_0 исчезает (см. (48)); при $d \lesssim k_F^{-1}$ из (16), (46) имеем $T_c - T_{c0} \gtrsim T_{c0}$, и приведенные формулы становятся неприменимыми; из физических соображений следует ожидать продолжения роста T_c при уменьшении d до масштаба $\sim \kappa_0^{-1}$.

5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАЗЛИЧИЕМ ПОПЕРЕЧНЫХ МАСС

$$(U = 0, m \neq m_1, M = M_1, \kappa = 0)$$

В этом случае все одночастичные состояния распространяются по всей системе, и для $N(z)$ справедливо выражение

$$N(z) = \frac{2M\sqrt{\beta}}{(2\pi)^2} \int_0^{q_F} dq \times \begin{cases} 2 \frac{(\beta+1) + (\beta-1) \cos(qd) \cos(2qz)}{(\beta+1)^2 - (\beta-1)^2 \cos^2(qd)}, & |z| < d/2 \\ 1 + \frac{(1-\beta^2) \sin^2(qd) \cos(2q\bar{z}) - \sqrt{\beta}(\beta-1) \sin(2qd) \sin(2q\bar{z})}{(\beta+1)^2 - (\beta-1)^2 \cos^2(qd)}, & \bar{z} = \sqrt{\beta} (|z| - d/2) \end{cases}, \quad (50)$$

где $q_F = \sqrt{2m_1 \varepsilon_F}$ и $\beta = m/m_1$.

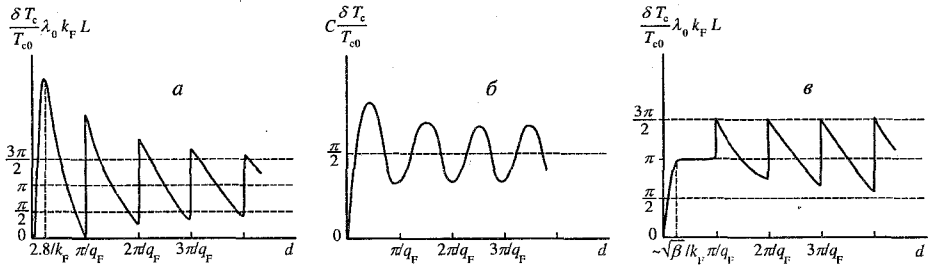


Рис. 4. Зависимость T_c от d в материалах 0 и 1, различающихся поперечными массами для $\lambda_1 = \lambda_0$: $a - m \gg m_1$; $b - |m - m_1| \ll m$, $C = 16(\beta - 1)^{-2} \lambda k_F L$; $v - m \ll m_1$

5.1. Случай $m \gg m_1$

При $\beta \gg 1$ подынтегральное выражение в (50) локализовано вблизи точек $q_s = \pi s/d$; аппроксимируя его набором δ -функций и подставляя в (13), имеем для T_c

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right) q_F d + g \left(\frac{q_F d}{\pi} \right) \right], \tag{51}$$

где линейный член согласуется с полученным в [5], а функция $g(x)$ равна

$$g(x) = \pi \{x\} + \pi \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left(-2\{x\} + \frac{5}{2} + \frac{\{x\}^2 - 5\{x\}/2 + 1}{x} \right) - \pi. \tag{52}$$

При $0 < x < 1$ функция $g(x) \propto 1/x$ и расходится при $x \rightarrow 0$. Для ликвидации расходимости нужно более аккуратно рассмотреть область $q_F d \ll 1$, раскладывая подынтегральные выражения по qd без использования аппроксимации δ -функциями; в результате

$$g(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{4}{\pi} \frac{1}{x} \left[\arctg \left(\frac{\pi \sqrt{\beta}}{2} x \right) \right]^2, \quad x \ll 1. \tag{53}$$

Зависимость T_c от d при $\lambda_1 = \lambda_0$ показана на рис. 4а: она имеет пилообразную форму в силу малости коэффициента прозрачности границ [8]; максимальное значение T_c достигается при $d = 2.8k_F^{-1}$ и равно

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}} \right)_{\max} = \frac{0.4}{\lambda_0 k_F L} \sqrt{\frac{m}{m_1}}. \tag{54}$$

5.2. Случай $|m - m_1| \ll m$

Раскладывая (50) по $\beta - 1$ и подставляя в (13), получим

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right) q_F d + \frac{\beta - 1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right) \text{Si}(2q_F d) + \left(\frac{\beta - 1}{4} \right)^2 g_1(2q_F d) \right], \tag{55}$$

где функция $g_1(x)$ определяется как

$$g_1(x) = \pi + \left(\frac{2\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right) \sin x + \frac{\sin x}{x} [-\pi + 2\text{Si}(2x)] - \frac{\cos x}{x} 2S_1(2x) \tag{56}$$

($S_1(x) = \ln x + C - \text{Ci}(x)$, $\text{Si}(x)$ и $\text{Ci}(x)$ — интегральные синус и косинус, C — постоянная Эйлера, см. [19], с. 732, 733) и имеет асимптотики

$$g_1(x) = \begin{cases} (2\lambda_1/\lambda_0 + 1)x, & x \ll 1 \\ \pi + (2\lambda_1/\lambda_0 - 1) \sin x, & x \gg 1 \end{cases} \quad (57)$$

Зависимость T_c от d кроме обычного линейного члена содержит затухающие осцилляции $\sim (\beta - 1)$ и незатухающие осцилляции $\sim (\beta - 1)^2$; при существенно различных λ_1 и λ_0 функцию $g_1(x)$ можно заменить ее асимптотикой при $x \gg 1$, а при $\lambda_1 \approx \lambda_0$ положить в ней $\lambda_1 = \lambda_0$. При $\lambda_1 = \lambda_0$ зависимость T_c от d определяется функцией $g_1(x)$ (см. рис. 4б); максимальное значение T_c достигается при $d = 1.2k_F^{-1}$ и равно

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_{\max} = \frac{0.33}{\lambda_0 k_F L} \left(\frac{m - m_1}{m}\right)^2 \quad (58)$$

5.3. Случай $m \ll m_1$

При $\beta \ll 1$ подынтегральное выражение локализовано вблизи точек $q_s = \pi s/d$; после аппроксимации его набором δ -функций и подстановки в (13) получим

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1\right) q_F d + g_2\left(\frac{q_F d}{\pi}\right) \right], \quad (59)$$

где

$$g_2(x) = \pi \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left(\frac{\{x\} - 1/2}{x} \{x\} - 2\{x\} + \frac{1}{2} \right) + \{x\} + 1 \right]. \quad (60)$$

Выражение (60) неприменимо в области малых x (т.е. при $q_F d \ll 1$), которую нужно рассмотреть отдельно, проводя в (50) разложение по qd и не используя аппроксимацию δ -функциями; в результате

$$g_2(x) = \text{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2} \frac{x - \varepsilon \text{arctg}(x/\varepsilon)}{x}, \quad \varepsilon = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}, \quad x \ll 1. \quad (61)$$

При $\lambda_1 = \lambda_0$ зависимость T_c от d определяется функцией $g_2(x)$ и показана на рис. 4е; максимальное значение T_c равно

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_{\max} = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \frac{3\pi}{2} \quad (62)$$

и достигается в точках $d = \pi s/q_F$ ($s = 1, 2, \dots$).

6. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАЗЛИЧИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАСС ($U = 0$, $m = m_1$, $M \neq M_1$, $\kappa = 0$)

6.1. Случай $M \gg M_1$

При $M > M_1$ продольный фермиевский импульс в материале 0 больше, чем в материале 1, и часть состояний не распространяется из материала 0 в материал 1 из-за

невозможности сохранения продольного импульса; поэтому для $N(z)$ справедливо разбиеие (18), где

$$N_A(z) = \frac{M}{(2\pi)^2} \frac{1}{\gamma} \int_0^{q_F} dq \frac{q}{k} H(k, q, z) \Big|_{k=\sqrt{(k_0^2+q^2)/\gamma}}, \quad (63a)$$

$$N_B(z) = \frac{M}{(2\pi)^2} \frac{1}{\gamma} \int_0^{k_0} dq \frac{q}{k} H(k, iq, z) \Big|_{k=\sqrt{(k_0^2-q^2)/\gamma}}, \quad (63b)$$

и использованы обозначения

$$\gamma = M/M_1, \quad k_0 = k_F \sqrt{\gamma - 1}, \quad k_F = q_F = \sqrt{2m\epsilon_F}.$$

При $M \gg M_1$, т. е. при $\gamma \gg 1$, существенных упрощений в (63) сделать нельзя — можно лишь положить $k \approx k_F$ в (63а); поэтому сразу подставим (18), (63) в формулу (13), записывая билинейные комбинации $N_A(z)$ и $N_B(z)$ в виде двойных интегралов. Получившиеся интегралы вычисляются следующим образом.

1) В интегралах от $N_B(z)$ и $N_B^2(z)$ после интегрирования по z последовательно рассматриваются три случая. В случае $k_F d \gg 1$ главный вклад в интеграл (63б) возникает от области $q \sim k_F$, что позволяет взять предел $qd \rightarrow \infty$ во входящих в $H(k, iq, z)$ гиперболических функциях. В случае $\gamma^{-1} \ll k_F d \ll 1$ главный вклад в интеграл (63б) дает область $q \sim d^{-1} \gamma^{-1/2}$, и гиперболические функции можно разложить в ряд с сохранением низшего порядка по qd . В случае $k_F d \ll \gamma^{-1}$ в интеграле (63б) существенна вся область интегрирования; после разложения в ряд гиперболических функций особое внимание требуется при выделении вклада окрестности верхнего предела интегрирования.

2) Интеграл от $N_A(z)N_B(z)$ в области $k_F d \lesssim 1$ мал по сравнению с интегралами от $N_B(z)$, $N_B^2(z)$; в области $k_F d \gtrsim 1$ он определяет осциллирующую часть T_c и после интегрирования по z вычисляется с логарифмической точностью; учитывается вклад $\sim \ln \gamma / \gamma$ области $|z| > d/2$, но отбрасываются вклады $\sim 1/\gamma$.

3) Поверхностная часть интегралов от $N_A(z)$ и $N_A^2(z)$ имеет верхнюю оценку $\sim 1/\gamma$, и ей можно пренебречь; для интеграла от $N_A(z) - N_A(\infty)$ по области $|z| > d/2$ это становится очевидным после интегрирования по z , остальные интегралы оцениваются с учетом поведения функции $N_A(z)$, которая при удалении от границы раздела выходит на значение $N_A(\infty) = N_0/\gamma$ на масштабе γk_F^{-1} в материале 0 и на значение $N_A(0) = N_0/\gamma$ на масштабе k_F^{-1} в материале 1.

В результате для поверхностного вклада в T_c получим

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_s = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \begin{cases} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1\right) \gamma k_F d + \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \frac{5}{6}\right) (\gamma k_F d)^2, & k_F d \ll \gamma^{-1} \\ -\frac{[\ln(\gamma k_F d)]^2}{2\gamma k_F d}, & \gamma^{-1} \ll k_F d \ll 1 \\ \frac{\ln \gamma}{\gamma} \left[\pi + \frac{\sin(2k_F d)}{8(k_F d)^2}\right], & k_F d \gg 1 \end{cases} \quad (64)$$

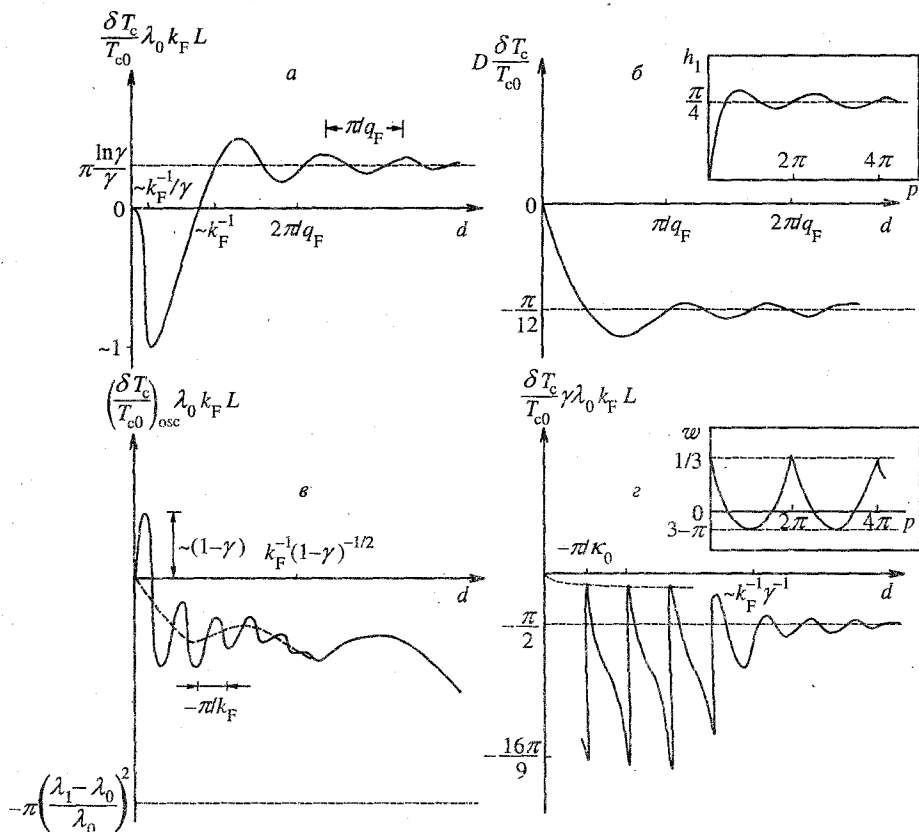


Рис. 5. Зависимость T_c от d в материалах 0 и 1, различающихся параллельными массами: *a* — $M \gg M_1$, $\lambda_1 = \lambda_0$; *б* — $0 < M - M_1 \ll M$, $\lambda_1 = \lambda_0$, $D = \lambda_0 k_F L (\gamma - 1)^{-2}$; *в* — $0 < M_1 - M \ll M$, $\lambda_1 < \lambda_0$; *з* — $M \ll M_1$, $\lambda_1 = \lambda_0$. На вставках — функции $h_1(p)$ и $w(p)$, входящие в формулы (66) и (76)

Зависимость T_c от d при $\lambda_1 = \lambda_0$ показана на рис. 5*a*; максимальное значение T_c достигается при $d \sim k_F^{-1}$ и имеет порядок величины

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_{\max} \sim \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \frac{\ln \gamma}{\gamma} \tag{65}$$

6.2. Случай $0 < M - M_1 \ll M$

Для $N(z)$ по-прежнему справедливы формулы (18), (63). В полной аналогии с п. 4.2 можно установить результат (31) с функцией $G(z)$, определяемой интегралами от q_F до бесконечности, при $\gamma - 1 \ll 1$ имеем $k_0 \ll k_F$ и $k - q \ll q$ во всей области интегрирования; проводя разложение по $(k - q)/q$ и подставляя (31) в формулу (13), получим

для поверхностного вклада в T_c ⁷⁾

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_s = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1\right) (\gamma - 1) h_1(2q_F d) + (\gamma - 1)^2 h_2(2q_F d) \right], \quad (66)$$

где функции $h_1(p)$ и $h_2(p)$ определяются как

$$h_1(p) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_1^\infty dx \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin(px), \quad (67)$$

$$h_2(p) = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} \frac{1}{p} \int_1^\infty dp \frac{\sin(px)}{x^5} + \frac{1}{8} \int_1^\infty \frac{\sin(px)}{x^2} \frac{x^2-1}{x^2} \ln \frac{x+1}{x-1} dx - \frac{1}{8} \int_0^1 \sin(px) \frac{x^2-1}{x^2} \ln \frac{x+1}{x-1} dx$$

и имеют асимптотики

$$h_1(p) = \begin{cases} p, & p \ll 1 \\ \frac{\pi}{4} + \frac{\sin p}{p^2}, & p \gg 1 \end{cases}, \quad h_2(p) = \begin{cases} -\frac{\pi}{48}, & p \ll 1 \\ -\frac{\pi}{24} - \frac{\pi \cos p}{4 p^2}, & p \gg 1 \end{cases} \quad (68)$$

При существенно различных λ_1 и λ_0 зависимость T_c от d определяется функцией $h_1(p)$, при $\lambda_1 = \lambda_0$ — функцией $h_2(p)$; их поведение показано на рис. 5б. При $\lambda_1 = \lambda_0$ величина δT_c отрицательна при всех d ; первый максимум осцилляций имеет место при $d = 3.6q_F^{-1}$, а значение T_c в нем равно

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_{\max} = -\frac{0.24}{\lambda_0 k_F L} \left(\frac{M - M_1}{M}\right)^2. \quad (69)$$

6.3. Случай $0 < M_1 - M \ll M$

При $M < M_1$ ввиду наличия квазидискретного спектра для $N(z)$ справедливо разбиение (15), где

$$N_c(z) = \frac{M}{(2\pi)^2} \frac{1}{\gamma} \int_{\kappa_0}^{q_F} dq \frac{q}{k} H(k, q, z) \Big|_{k=\sqrt{(q^2-\kappa_0^2)/\gamma}}, \quad \kappa_0 = k_F \sqrt{1-\gamma}, \quad (70)$$

а $N_{q1}(z)$ определяется выражениями (37) с N_{2D}^s вида

$$N_{2D}^s = \frac{M_1}{2\pi} (k_s d + 2) \left(k_s d + 2 + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{2q_s^2}{k_s^2 + q_s^2} \right)^{-1} \theta(\kappa_0 - q_s) \theta(q_s), \quad (71)$$

где $k_s = \sqrt{(\kappa_0^2 - q_s^2)/\gamma}$, а q_s — корни уравнения (38). Так же, как в п. 4.3, устанавливается результат (31) с той же функцией $G(z)$, что и в п. 6.2. При $1 - \gamma \ll 1$ для

⁷⁾Выражения для $G(z)$ из-за условной сходимости интегралов неприменимы в бесконечно малой окрестности точек $z = \pm d/2$, где возникают нефизические δ -образные особенности, вклад которых не должен учитываться при интегрировании по z .

T_c справедлива формула (41) с λ_{s0} из (42), приводящая к следующему результату для поверхностного вклада в T_c :

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_s = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1\right) (\gamma - 1) h_1(2q_F d) + (\gamma - 1)^2 h_2(2q_F d) + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1\right)^2 \pi u\left(\frac{\kappa_0 d}{2}\right) \right], \quad (72)$$

Функции $h_1(p)$ и $h_2(p)$ определены в (84), а функция $u(p)$ в низшем порядке по $1 - \gamma$ та же, что в (43). Зависимость T_c от d при $\lambda_1 \neq \lambda_0$ показана на рис. 5б; при $\lambda_1 = \lambda_0$ она определяется функцией $h_2(p)$ и оказывается такой же, как в предыдущем случае.

6.4. Случай $M \ll M_1$

Из (70) нетрудно выяснить поведение функций $N_{ql}(z)$ и $N_c(z)$ при $\gamma \ll 1$: функция $N_{ql}(z)$ меняется вблизи границы раздела от нуля до $N^* \approx N_0/\gamma$ на масштабе k_F^{-1} , принимая на границе значение $\sim N_0$; функция $N_c(z)$ при уменьшении $|z|$ меняется от N_0 до $N_c(d/2) \sim N_0$ на масштабе k_F^{-1} , затем от $N_c(d/2)$ до $N^* = N_0/2$ на масштабе k_F^{-1}/γ . Таким образом, $a_{ql} \sim k_F^{-1}$, $a_c \sim k_F^{-1}/\gamma$; в области $k_F d \gg 1/\gamma$ пользуемся формулой (14), в области $1 \ll k_F d \lesssim 1/\gamma$ — более общей формулой (17); так как $\lambda_{qq} < 0$ (см. ниже), квазифазовый переход (см. [5]) отсутствует. Учитывая, что при $\lambda_1 \sim \lambda_0$ справедлива оценка $V_0/V_1 \sim 1/\gamma$, получим, что параметры λ_{qc} , λ_{cq} , λ_{cc} определяются интегралом

$$\int_{|z| < d/2} dz [N_c(z) - N^{**}] = \begin{cases} \frac{1}{2} N_0 dw(q_F d/2), & \gamma k_F d \ll 1 \\ \frac{N_0}{\gamma k_F} \left[\pi \left\{ \frac{\kappa_0 d}{\pi} \right\} - \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2k_F d)}{8(\gamma k_F d)^2} \right], & \gamma k_F d \gg 1 \end{cases}, \quad (73)$$

который вычисляется в двух предельных случаях: при $\gamma k_F d \ll 1$ в (70) можно положить $q \approx \kappa_0$, а при $\gamma k_F d \gg 1$ провести разложение в ряд Фурье по qd , как в (П.2), взяв асимптотику интегралов с быстро осциллирующими экспонентами [20]; в (73) члены с периодами π/κ_0 и π/q_F выписаны в низшем порядке по $1/d$, а функция $w(p)$ равна (см. вставку на рис. 5з)

$$w(p) = \bar{w}(p) + \bar{w}\left(p + \frac{\pi}{2}\right) - 1, \quad \bar{w}(p) = \frac{\cos p - \pi(1/2 - \{p/\pi\}) \sin p}{\cos^2 p}. \quad (74)$$

При вычислении λ_{qq} аналогично п. 4.4 выделяется вклад $\sim n$, а оставшаяся часть $O(n^0)$ вычисляется в двух предельных случаях: при $\gamma k_F d \gg 1$ путем перехода от суммирования к интегрированию, а при $\gamma k_F d \ll 1$ с использованием асимптотики q_s при $\gamma \rightarrow 0$ ($q_s = \pi s/d$, $s = 1, \dots, n - 1$, $q_n = \kappa_0$) и того, что главный вклад дают q_n и q_{n-1} . В результате

$$\lambda_{qq} a = \frac{\pi \lambda_1 \lambda^*}{k_F} \begin{cases} -\{\kappa_0 d/\pi\}, & \gamma k_F d \gg 1 \\ \sigma(\kappa_0 d/\pi), & \gamma k_F d \ll 1 \end{cases}, \quad (75)$$

$$\sigma(x) = -\{x\} - \frac{\varepsilon}{\{x\}^{3/2} + \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{2\sqrt{\gamma k_F d}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Вычисление T_c на основе выражений (14), (17) дает

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_s = \frac{1}{\lambda_0 k_F L} \frac{1}{\gamma} \times \begin{cases} -\pi \left(\frac{\lambda_1 - \lambda^*}{\lambda_0 - \lambda^*}\right)^2 \left\{ \frac{\kappa_0 d}{\pi} \right\} + \left(1 - 2 \frac{\lambda_1 - \lambda^*}{\lambda_0 - \lambda^*}\right) \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(2q_F d)}{8(\gamma k_F d)^2} \right], & \gamma k_F d \gg 1 \\ -w \left(\frac{q_F d}{2}\right) \frac{\gamma k_F d}{2} + \pi \left(\frac{\lambda_1 - \lambda^*}{\lambda_0 - \lambda^*}\right)^2 \left[w \left(\frac{q_F d}{2}\right) + 1 \right]^2 \sigma \left(\frac{\kappa_0 d}{\pi}\right), & \gamma k_F d \ll 1 \end{cases} \quad (76)$$

При больших d осцилляции описываются суммой двух периодических функций с периодами π/q_F и π/κ_0 аналогично предыдущему случаю; при $\lambda_1 = \lambda_0$ величина δT_c отрицательна при всех d (рис. 5з): ее значение в первых максимумах квантовых осцилляций ($k_F d \sim 1$) имеет порядок

$$\left(\frac{\delta T_c}{T_{c0}}\right)_{\max} \sim -\frac{1}{\lambda_0 k_F L} \left(\frac{M_1}{M}\right)^{4/5} \quad (77)$$

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Условие малости объемного вклада в T_c требует использования минимально возможных d . Рассматривая с учетом этого кривые на рис. 2, 4, 5, нетрудно убедиться, что во всех случаях перспектива повышения T_c связана с первым максимумом квантовых осцилляций; значение T_c в этом максимуме удобно рассматривать как меру поверхностного вклада в T_c : его зависимость от параметров модели при $\lambda_1 = \lambda_0$ показана на рис. 6 (рис. 6з построен по результатам работы [8]). Нетрудно видеть, что различие в положении дна зоны ($U \neq 0$) и различие поперечных масс ($m \neq m_1$) всегда благоприятствуют повышению T_c , тогда как различие параллельных масс ($M \neq M_1$) в основном ему препятствует; наличие δ -образного потенциала на границе ($\kappa \neq 0$) мешает повышению T_c при условии $0 < \kappa \lesssim k_F$, но способствует в остальных случаях. Качественное представление о совместном действии всех факторов можно получить, взяв суперпозицию кривых на рис. 6а-г.

Физически повышение T_c при $\kappa \gtrsim k_F$ (рис. 6з) связано с интерференцией плоских волн, отраженных от двух границ раздела [8], и имеет место лишь при определенной соизмеримости d с длиной волны (усредненное по осцилляциям изменение T_c близко к нулю). При $\kappa < 0$ причиной повышения T_c является увеличение локальной плотности состояний на границах раздела, вызванное поверхностным потенциалом в виде потенциальной ямы; при $\kappa < \kappa_c$ это приводит к локализации параметра порядка на границах раздела [6, 7]. Эти эффекты частично присутствуют и в остальных случаях (рис. 6а-в), но теперь основную роль играет перемещение электронов из материала с высокой плотностью состояний и низким значением V в материал с высоким V ; количественные проявления этого эффекта зависят от конкретной ситуации: при $\alpha < \alpha_c$ он вызывает локализацию параметра порядка в слоях материала 1, тогда как в случае $\gamma \ll 1$ он не «срабатывает» вообще.

Представленная картина может потребовать некоторой корректировки, так как в реальном эксперименте могут быть существенны факторы, не учтенные в рассмотренной модели; поэтому желательно проведение систематического экспериментального исследования зависимости T_c от d в слоистых структурах. Современные технологии позво-

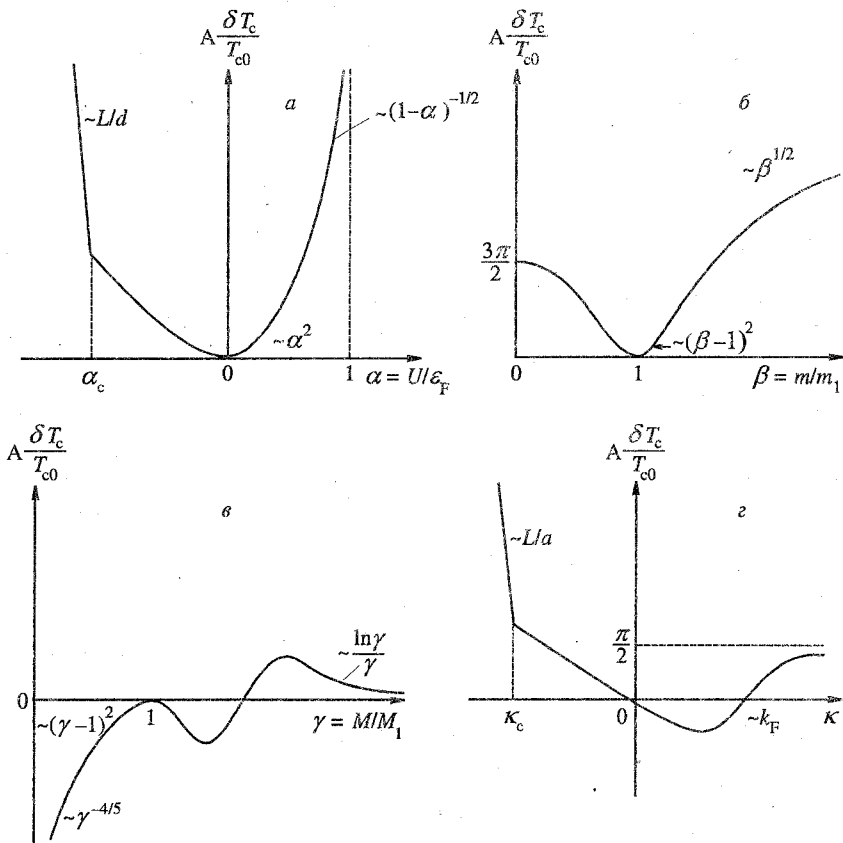


Рис. 6. Зависимость значения T_c в первом максимуме квантовых осцилляций от параметров модели при $\lambda_1 = \lambda_0$ для следующих случаев: *a* — $U \neq 0, m = m_1, M = M_1, \kappa = 0$; *б* — $U = 0, m \neq m_1, M = M_1, \kappa = 0$; *в* — $U = 0, m = m_1, M \neq M_1, \kappa = 0$; *г* — $U = 0, m = m_1, M = M_1, \kappa \neq 0$. Здесь $A = \lambda_0 k_F L$

ляют создавать сверхрешетки с толщинами порядка нескольких ангстрем (см., например, [21]), однако большинство экспериментов проводится на системах с большими периодами, в которых поверхностные эффекты малосущественны [22, 23].

Авторы признательны А. Ф. Андрееву, Н. В. Заварицкому и Ю. В. Копаеву за обсуждение.

Работа поддержана грантом Международного научного фонда, присужденным Американским физическим обществом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразование $F(z)$

При $U > 0$ перепишем $F(z)$ в виде

$$F(z) = \frac{1}{2} \frac{M}{(2\pi)^2} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\delta^2}{q^2 + \delta^2} \left[\frac{|q|}{k} H(k, q, z) - 2 \right] \tag{П.1}$$

для $|z| < d/2$ и аналогично для $|z| > d/2$. Разложим в ряд Фурье по qd входящие в $H(k, q; z)$ комбинации:

$$\frac{1}{u^+(k, q)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k|q|} \left(\frac{|q| - k}{|q| + k} \right)^{|n|} e^{inqd},$$

$$\frac{1}{v^+(k, q)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k|q|} \left(\frac{k - |q|}{k + |q|} \right)^{|n|} e^{inqd}.$$
(П.2)

Делая, где нужно, замены $n \rightarrow -n$, $q \rightarrow -q$, представим результат в виде суммы, содержащей множители $\exp(icq)$ лишь с положительными c ; для $|z| > d/2$ разложим также в степенные ряды $\cos(2kz')$ и $\sin(2kz')$. Подынтегральное выражение аналитично в комплексной плоскости q за исключением комбинации

$$|q|k = \sqrt{q^2 + \varepsilon^2} \sqrt{q^2 + k_0^2}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\text{П.3})$$

для регуляризации которой сделаем разрезы ($i\varepsilon, ik_0$) и ($-ik_0, -i\varepsilon$). Сместив контур интегрирования вверх, получим интеграл по разрезу ($i\varepsilon, ik_0$) (вклад полюса $i\delta$ исчезает при $\delta \rightarrow \infty$), который приводится к виду (30).

При $U < 0$ разрез делается от ε до κ_0 и от $-\kappa_0$ до $-\varepsilon$. Подынтегральное выражение не имеет особенностей в верхней полуплоскости, и $F(z)$ сводится к интегралу по верхнему берегу разреза ($-\kappa_0, \kappa_0$). На разрезе имеются полюса, соответствующие уровням квазидискретного спектра; представим интеграл в виде главного значения и суммы полюсов: первое дает константу N^* при $|z| < d/2$ и нуль при $|z| > d/2$, вторая оказывается равной $-N_{q1}(z)$.

Литература

1. И. М. Мазин, Е. Г. Максимов, С. Н. Раткевич и др., Письма в ЖЭТФ **46** (Приложение), 120 (1987); W. Weber, Phys. Rev. Lett. **58**, 1371 (1987).
2. L. N. Cooper, Phys. Lett. **6**, 689 (1961).
3. P. G. de Gennes, Rev. Mod. Phys. **36**, 225 (1964).
4. Д. А. Киржниц, Е. Г. Максимов, Письма в ЖЭТФ **2**, 442 (1965); ФММ **22**, 520 (1966).
5. И. М. Сулов, СФХТ **4**, 1065 (1991).
6. И. М. Сулов, ЖЭТФ **95**, 949 (1989).
7. И. М. Сулов, СФХТ **4**, 2093 (1991).
8. Ю. А. Кротов, И. М. Сулов, ЖЭТФ **102**, 670 (1992).
9. Ю. А. Кротов, И. М. Сулов, ЖЭТФ **103**, 1394 (1993).
10. В. М. Голянов, М. Н. Михеева, М. Б. Цетлин, ЖЭТФ **68**, 736 (1975); В. М. Голянов, М. Н. Михеева, ЖЭТФ **70**, 2236 (1976).
11. К. А. Осипов, А. Ф. Орлов, В. П. Дмитриев, Л. К. Милай, ФТТ **19**, 1226 (1977).
12. H. Sixl, Phys. Lett. A **53**, 333 (1975).
13. С. А. Виткалов, Ф. А. Пудонин, Е. Г. Сокол, И. М. Сулов, Письма в ЖЭТФ **49**, 160 (1989).
14. Ю. М. Каган, Л. Б. Дубовский, ЖЭТФ **72**, 647 (1977).
15. Yu. A. Krotov and I. M. Suslov, Physica C (1995), in press.
16. С. А. Виткалов, Ф. А. Пудонин, Е. Г. Сокол, СФХТ **7(6)** (1994).
17. П. де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).

18. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1988), с. 342.
19. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977).
20. А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, Москва (1975), с. 23.
21. S. M. Durbin, J. E. Cunningham, M. E. Mochel, and C. P. Flynn, *J. Phys. F: Metal Phys.* **11**, L223 (1981).
22. K. Kanoda, H. Mazaki, N. Hosoi, and T. Shinjo, *Phys. Rev. B* **35**, 6736 (1987).
23. W. P. Lowe and T. H. Geballe, *Phys. Rev. B* **29**, 4961 (1984).