

Л. П. Грабарь

РАСЧЕТ СОЛЕНОИДА С ОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ *

Изложен метод расчета соленоида с однородным магнитным полем, основанный на применении полиномов Чебышева, ортонормированных на системе равноотстоящих точек, к решению интегрального уравнения для плотности тока в соленоиде. Этим методом рассчитан соленоид с обмоткой, имеющей постоянный внешний и внутренний диаметры и собранной из секций с различной плотностью тока. Произведено сопоставление с результатами, полученными в работе С. П. Капицы [1], где та же задача решалась путем подбора распределения тока.

ВВЕДЕНИЕ

Для многих приложений нужны соленоиды, создающие однородное магнитное поле в значительном объеме, вследствие чего возникает потребность в методе расчета таких соленоидов. Поскольку плотность тока в обмотке соленоида связана с напряженностью магнитного поля интегральным уравнением Фредгольма первого рода, то можно применить метод решения таких уравнений, изложенный в статье [2]. Это и сделано в данной работе, причем мы сравниваем наши результаты с результатами, полученными в работе [1] методом подбора.

§ 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим соленоид с обмоткой в виде полого цилиндра конечной длины (рис. 1), в котором плотность тока зависит только от продольной координаты. Интегральное уравнение для плотности тока $z(y)$ имеет вид (ср. [1])

$$\int_{-L}^L K(x, y) z(y) dy = u(x) \text{ при } -\theta L < x < \theta L, \quad (1)$$

* Статья поступила 8 февраля 1967 г.

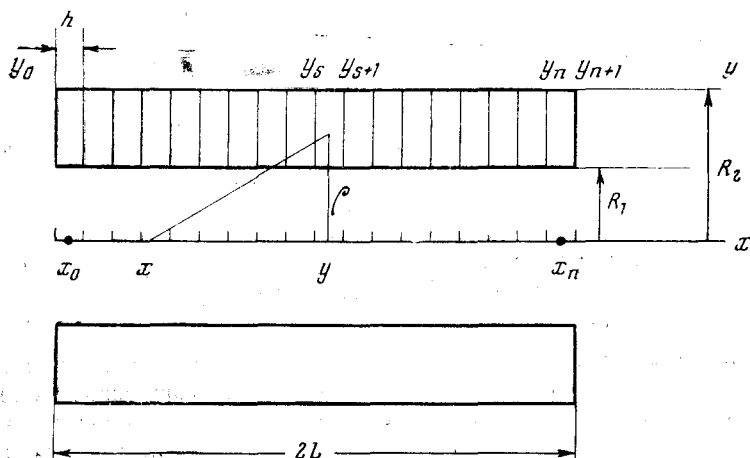


Рис. 1. К расчету соленоида

где $2L$ — длина соленоида, $u(x)$ — продольная составляющая магнитного поля на оси соленоида, заданная на отрезке длиной $2\theta L$ (в дальнейшем мы считаем $0 < \theta < 1$), а

$$K(x, y) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2 d\rho}{[(y-x)^2 + \rho^2]^{3/2}} = 2\pi \left[\frac{R_1}{\sqrt{(y-x)^2 + R_1^2}} - \frac{R_2}{\sqrt{(y-x)^2 + R_2^2}} + \ln \frac{R_2 + \sqrt{(y-x)^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{(y-x)^2 + R_1^2}} \right] \quad (2)$$

— ядро интегрального уравнения, R_1 — внутренний, R_2 — внешний радиусы.

Требуется рассчитать соленоид, собранный из $n+1$ секций с различными плотностями тока, постоянными в пределах каждой секции. Мы разбиваем отрезок $(-L, L)$ на $n+1$ равных участков длиной $h = \frac{2L}{n+1}$; s -й участок определяется условиями

$$\begin{aligned} y_s < y < y_{s+1}, \quad s = 0, 1, \dots, n, \\ y_s = -L + sh, \quad s = 0, 1, \dots, n+1, \end{aligned} \quad (3)$$

так что $y_0 = -L$ и $y_{n+1} = L$. Как уже говорилось, мы считаем функцию $z(y)$ ступенчатой, т. е. на s -м участке считаем плотность

$z(y)$ постоянной и равной $z_s = z(y_s + 0)$. Это условие, вводимое из конструктивных соображений, приводит к тому, что магнитное поле $u(x)$ в интегральном уравнении (1) можно задавать лишь в $n+1$ дискретных точках с тем, чтобы число неизвестных z_s было равно числу уравнений. Поэтому на отрезке $-\theta L < x < \theta L$ мы размещаем $n+1$ равноотстоящих точек

$$x_r = \theta \frac{y_r + y_{r+1}}{2}, \quad r=0, 1, \dots, n \quad (4)$$

и требуем, чтобы интегральное уравнение (1) удовлетворялось в этих точках. Таким образом мы приходим к системе линейных уравнений

$$\sum_{s=0}^n K_{rs} z_s = u_r, \quad r=0, 1, \dots, n \quad (5)$$

для неизвестных величин z_s . В этой системе $u_r = u(x_r)$, а элементы матрицы $\|K_{rs}\|$ определяются выражением

$$K_{rs} = \int_{y_s}^{y_{s+1}} K(x_r, y) dy = 2\pi \left[(y_{s+1} - x_r) \ln \frac{R_2 + \sqrt{(y_{s+1} - x_r)^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{(y_{s+1} - x_r)^2 + R_1^2}} - \right. \\ \left. - (y_s - x_r) \ln \frac{R_2 + \sqrt{(y_s - x_r)^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{(y_s - x_r)^2 + R_1^2}} \right]. \quad (6)$$

Система (5) при больших n плохо обусловлена и потому малоприменяема для определения z_s . Таким образом проявляется некорректность в постановке данной задачи, сведенной к решению интегрального уравнения (1); корректная постановка задачи должна включать дополнительные сведения о характере искомой функции $z(y)$ [применительно к уравнению (1)] и соответствующих величинах z_s [применительно к системе (5)], с помощью которых мы аппроксимируем функцию $z(y)$ ступенчатой функцией. Эти дополнительные сведения можно сформулировать следующим образом: неизвестную функцию $z(y)$ мы предполагаем достаточно плавной, т. е. маломеняющейся на отрезке порядка $|h|$. Аналогичное предположение о неизвестных величинах z_s сформулируем так: вводя коэффициенты

$$b_k = \sum_{s=0}^n z_s P_{k,n}(s) \quad (k=0, 1, \dots, m), \quad (7)$$

мы можем аппроксимировать значения z_s значениями полинома

$$Z_m(y_s) = \sum_{k=0}^m b_k P_{k,n}(s), \quad (8)$$

степень m которого (при больших n) существенно меньше n .

Здесь

$$P_{k,n}(s) = \sqrt{\frac{(2k+1)n^{(k)}}{(n+k+1)^{(k+1)}}} \sum_{t=0}^k (-1)^t \binom{k}{t} \binom{k+t}{t} \frac{s^{(t)}}{n^{(t)}}$$

— полиномы Чебышева, ортонормированные на системе равноотстоящих точек (таблицы этих полиномов даны в работе [3]); k — степень полинома; $n+1$ — число точек; s принимает целочисленные значения $0, 1, \dots, n$ (вместо $x_0, x_1, \dots, x_n$ в общем случае); через $s^{(t)}$, $n^{(t)}$ и т. д. обозначены обобщенные степени

$$s^{(t)} = s(s-1) \dots (s-t+1),$$

а через $\binom{k}{t} = \frac{k^{(t)}}{t!}$ — биномиальные коэффициенты.

В формуле (8) коэффициенты b_k нам неизвестны, равно как и величины z_s . Однако в силу условия $m < n$ нужное нам число коэффициентов b_k существенно меньше числа величин z_s . В силу четности функций $K(x, y) = K(|x-y|)$ и $u(x)$ функция $z(y)$ также четная, а потому при нечетных k все $b_k = 0$ и нам надо вычислить (беря m четным) лишь $\frac{m}{2} + 1$ неизвестных коэффициентов b_k ($k = 0, 2, \dots, m$).

Уравнения для коэффициентов b_k получаются так же, как в статье [2]. Зная u_r , мы вычисляем коэффициенты

$$c_j = \sum_{r=0}^n u_r P_{j,n}(r) \quad (j = 0, 2, \dots, m) \quad (9)$$

и аппроксимируем функцию $u(x)$ полиномом

$$U_m(x_r) = \sum_{i=0}^m c_i P_{i,n}(r) \quad (r = 0, 1, \dots, n) \quad (10)$$

той же степени m .

Ортонормированные полиномы Чебышева удовлетворяют соотношению

$$\sum_{s=0}^n P_{j,n}(s) P_{k,n}(s) = \delta_{jk}. \quad (11)$$

Подставляя в систему (5) вместо z_s и u_r выражения (8) и (10), умножая обе части равенства на $P_{j,n}(r)$ и проводя суммирование по r (от 0 до n), в силу соотношения (11) придем к системе линейных уравнений для неизвестных коэффициентов b_k

$$\sum_{k=0}^m A_{jk} b_k = c_j \quad (j, k = 0, 2, \dots, m), \quad (12)$$

где

$$A_{jk} = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n K_{rs} P_{j,n}(r) P_{k,n}(s). \quad (13)$$

Система (12) имеет существенно меньший порядок, чем система (5), и хорошо обусловлена. Ее и следует решать. Так как степень m аппроксимирующего полинома *a priori* неизвестна, она определяется в процессе вычислений (ср. [2]).

По найденным в результате решения системы (12) значениям b_k вычислялись по формуле (8) значения $Z_m(y_s)$, которые и брались в качестве z_s . Подставляя эти z_s в левую часть (5), мы вычисляли поле соленоида $u(x)$ в точках x_r . Аналогичным образом [с помощью интеграла, стоящего в левой части (1)] можно вычислить поле на всей оси соленоида. Известно (см., например, [4]), что однородность поля на оси влечет за собой однородность поля в объеме, окружающем ось.

§ 2. РАСЧЕТ СОЛЕНОИДА

Изложенным выше методом был произведен расчет соленоида, рассмотренного в работе [1]. Мы взяли $n=27$, $2L/h=28$, $R_1/h=3,3269$, $R_2/h=6,4990$, $u(x)=539,6$, где h (длина секции) для упрощения соотношений бралась равной единице. Так как возможно более однородное поле (с неоднородностью порядка 0,1% или меньше) нужно получить на возможно большем участке оси, параметр θ варьировался. Мы брали значения: $\theta=26/28$,

24/28, 22/28, 21/28, 20/28, 18/28, 16/28, 14/28. При каждом значении θ вычисления проводились для значения $m=2, 4, \dots, \bar{m}$, насколько позволяла точность вычислений машины (так, например, для $\theta=26/28$, $\bar{m}=10$; при $\theta=16/28$, $\bar{m}=16$).

Наряду с параметром θ , характеризующим длину участка оси, где мы *хотим получить* однородное поле, введем параметр θ_0 , характеризующий длину участка ($-\theta_0 L < x < \theta_0 L$), в котором **найденные** значения z_s *фактически создают* поле, однородное с точностью 0,1% (или иной). При $\theta=26/28$, т. е. когда мы хотим создать однородное поле почти на всей длине соленоида, мы не можем получить $\theta_0 > 3/28$ ни при каких значениях m .

Для меньших значений θ с возрастанием m параметр θ_0 увеличивается, но, как правило, при этом обычно возрастает коэффициент перегрузки соленоида K , определяемый как отношение плотности тока в крайних и средних витках. Коэффициент перегрузки тем больше, чем больше θ . Наилучшие результаты, т. е. наибольшее значение $\theta_0=21/28=3/4$, получены при $\theta=21/28$ и $m=8$; однородность поля на участке $2\theta_0 L$, т. е. на 21 секции из 28, выдерживается с точностью 0,06%. В этом варианте $K=3,16$; при выборе наилучшего варианта учитывался коэффициент K , и при одинаковых значениях θ_0 лучшим считался тот вариант, у которого K меньше.

В табл. 1 помещены значения $z_s = Z_s(y_s)$ и $\bar{z}_s = z_s/z_{14}$ (значения $s=13$ и $s=14$ соответствуют двум центральным секциям), а кроме того, значения $\tilde{u}_s = u \left(\frac{y_s + y_{s+1}}{2} \right)$ ($\tilde{u}_s$ можно рассматривать как u_s при $\theta=1$), нормированные значения $\bar{u}_s = \tilde{u}_s/\tilde{u}_{14}$ и $\Delta_s = (1 - \bar{u}_s) \cdot 10^5$.

Аналогичным образом проводился расчет соленоида той же формы, т. е. при условиях

$$\frac{R_1}{2L} = \frac{3,3269}{23}, \quad \frac{R_2}{2L} = \frac{6,4990}{28}, \quad \frac{R_2}{R_1} = 1,95$$

и при других значениях n :

$n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 19, 39, 55$, т. е. когда соленоид разбивался на $n+1$ секций длиной $2L/(n+1)$ (при этом мы по-прежнему считаем $2L=28$).

Таблица 1

Результаты при $n=27$, $\theta=\frac{21}{28}$ и $m=8$

s	z_s	$\bar{z}_s$	$\tilde{u}_s$	$\bar{u}_s$	Δ_s
14	88,476	1,00000	539,7407	1,00000	0
15	87,980	0,99439	539,6117	0,99976	24
16	87,344	0,98721	539,4690	0,99950	50
17	87,110	0,98456	539,4488	0,99946	54
18	87,702	0,99125	539,5853	0,99971	29
19	89,097	1,00702	539,7488	1,00001	-1
20	90,598	1,02398	539,7390	1,00000	0
21	90,904	1,02744	539,5210	0,99959	41
22	88,705	1,00259	539,4081	0,99938	62
23	84,085	0,95037	539,7480	1,00001	-1
24	81,066	0,91625	539,5212	0,99959	41
25	91,643	1,03580	533,8213	0,98903	1097
26	141,78	1,60247	512,4159	0,94937	5063
27	279,75	3,16187	464,7950	0,86114	13886

Как показали вычисления, увеличение числа секций однородности поля не улучшает: значение $n=27$ уже больше, чем нужно, так что при $n>27$ то же значение θ_0 достигается при больших значениях K .

С уменьшением n при $\theta_0=\text{const}$ коэффициент K убывает, а так как этот практически важный коэффициент не должен превышать двух (ср. [1]), то, следовательно, число секций соленоида должно быть меньше 28, т. е. $n<27$. Уменьшая n , мы получили $\theta_0=3/4$ при $K=2,15$; этот оптимальный случай соответствует значениям $n=11$, $\theta=21/28$, $m=8$, т. е. реализуется для соленоида с двенадцатью секциями.

В табл. 2 помещены значения z_s , $\bar{z}_s$, $\tilde{u}_s$, $\bar{u}_s$ и Δ_s для этого случая ($s=5$ и $s=6$ — центральные секции). Сравнение табл. 1 и 2 показывает, что при $n=11$ (12 секций) мы получили $\theta_0=3/4$, т. е. однородное поле имеет примерно такую же длину, что и при $n=27$ (28 секций), вместе с тем коэффициент перегрузки существенно меньше при $n=11$.

Таблица 2

Результаты при $n=11$, $\theta=\frac{21}{28}$ и $m=8$

s	$\bar{z}_s$	$\bar{z}_s$	$\bar{u}_s$	$\bar{u}_s$	Δ_s
6	88,190	1,00000	539,63	1,00000	0
7	87,207	0,98885	539,53	0,99981	19
8	90,070	1,02132	539,70	1,00013	-13
9	89,320	1,01281	539,45	0,99967	33
10	78,428	0,88931	539,60	0,99994	6
11	190,29	2,15773	487,32	0,90306	9694

Мы проводили расчет соленоида при других значениях отношений $R_1/2L$ и R_2/R_1 , а именно при $\frac{R_1}{2L} = 1,5/28; 2/28; 4/28$ (считая $2L=28$) и $R_2/R_1=1,5; 1,95; 2,5$. При постоянстве R_2/R_1 , n , θ и m с уменьшением $R_1/2L$ коэффициент K уменьшается, а с увеличением R_2/R_1 (при постоянстве $R_1/2L$, n , θ и m) — увеличивается.

§ 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сравним распределение тока и поля, полученное изложенным выше методом, с тем, что было ранее получено путем подбора. В работе [1] таким образом был найден соленоид, создающий однородное поле на участке $17/28$ длины соленоида; он имел 28 секций и геометрические размеры, указанные в начале § 2; соответствующие результаты приведены в табл. 3, причем $K=1,74$.

Эти результаты интересно сопоставить с нашими результатами, приведенными в табл. 2 (где $\theta_0=3/4$ и $K=2,15$). На рис. 2 произведено это сопоставление. Мы видим, что найденные нами значения z_s при $n=11$ дают более однородное поле: длина участка однородности возросла на 23% при меньшем числе секций (т. е. при более простой конструкции соленоида) и при незначительном превышении K .

В табл. 4 приведены результаты для соленоида той же формы, который составлен из 9 секций; он характеризуется значениями

$\theta_0 = 19/28$ и $K = 1,67$ и во всех отношениях лучше соленоида [1] (соответствующего табл. 3).

Таблица 3

Результаты, полученные в работе [1]

s	z_s	$\bar{z}_s$	$\tilde{u}_s$	$\bar{u}_s$	Δ_s
14	88	1,00000	539,3230	1,00000	0
15	88	1,00000	539,3213	1,00000	0
16	88	1,00000	539,3274	1,00001	-1
17	88	1,00000	539,3445	1,00004	-4
18	89	1,0114	539,3533	1,00006	-6
19	89	1,0114	539,3384	1,00003	-3
20	89	1,0114	539,3356	1,00002	-2
21	89	1,0114	539,3840	1,00011	-11
22	89	1,0114	539,2581	0,99988	12
23	89	1,0114	537,7610	0,99710	290
24	89	1,0114	531,3934	0,98530	1470
25	138	1,5682	513,2996	0,95175	4825
26	153	1,7386	475,4833	0,88163	11837
27	153	1,7386	415,3466	0,77013	22987

Таблица 4

Результаты при $n=8$, $\theta=\frac{18}{28}$ и $m=8$

s	z_s	$\bar{z}_s$	$\tilde{u}_s$	$\bar{u}_s$	Δ_s
4	87,997	1,00000	539,60	1,00000	0
5	88,183	1,00212	539,60	1,00000	0
6	89,347	1,01534	539,58	0,99996	4
7	87,468	0,99399	539,13	0,99913	87
8	146,540	1,66530	477,21	0,88438	11562

В работе [1] предполагалось, что плотность тока в секциях должна монотонно возрастать от центра соленоида к концам; это возрастание до известной степени компенсирует ослабление магнитного поля у концов, обусловленное расхождением силовых линий. Наши вычисления показали, что плотность тока $z(y)$

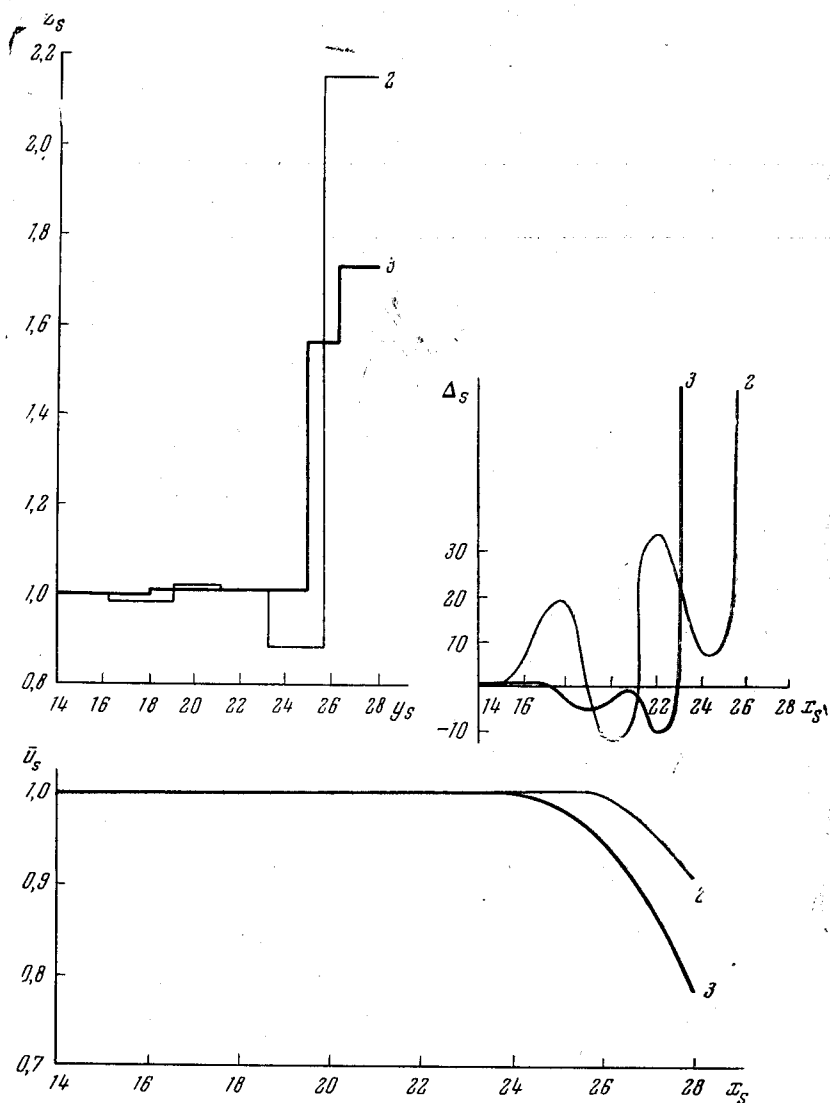


Рис. 2. Сравнение соленоидов, соответствующих табл. 2 и 3
(цифры у кривых — номера таблиц)

на интервале $0 < y < L$ ($2L$ — длина соленоида) не всегда является монотонной. Так, на рис. 2 кривая 2 для $\bar{z}$ испытывает несколько слабых колебаний перед тем, как начать сильно возрастать при $y \rightarrow L$; то же самое получается и при ряде других значений n , θ и m . Расчеты показали, что искусственное выравнивание этих колебаний, т. е. переход к монотонной функции $z(y)$ (при $0 < y < L$), ухудшает однородность магнитного поля.

В работе [1] утверждалось, что при увеличении коэффициента K до значения $K > 2$ не возрастают размеры области, в которой магнитное поле однородно. Однако наши расчеты показали, что для соленоида с 28 секциями наибольшие значения θ_0 ($\theta_0 = \pi/4$) получаются при $K > 2$, а именно при $K = 3,14$ (см. табл. 1).

В табл. 5 и 6 помещены результаты, полученные нами при $n=6$ и $n=19$ (соленоиды с 7 и 20 секциями). Поскольку число секций при $n=6$ невелико, для оценки однородности магнитного поля необходимо вычислить $u(x)$ не только в узловых, но и в промежуточных точках, т. е. для дробных значений s ; соответствующие кривые приведены на рис. 3.

Полученные нами результаты показывают, как при изменении основных параметров соленоида (числа секций $n+1$, отношения R_1/R_2 , коэффициента K) изменяется однородность поля.

Таблица 5

Результаты, полученные при $n=6$, $\theta = \frac{16}{28}$ и $m=4; 6$

s	z_s	$\bar{z}_s$	$\tilde{u}_s$	$\bar{u}_s$	Δ_s
$m=6$					
3	88,075	1,00000	539,60	1,00000	0
4	88,595	1,00591	539,56	0,99994	6
5	89,263	1,01349	539,60	1,00000	0
6	125,090	1,42032	475,47	0,88116	11884
$m=4$					
3	88,907	1,00000	539,94	1,00000	0
4	87,660	0,98598	539,25	0,99872	128
5	91,280	1,02670	539,58	0,99934	66
6	121,840	1,37046	469,70	0,86991	13009

Таблица 6

Результаты, полученные при $n=19$, $\theta=\frac{18}{28}$ и $m=10$

s	z_s	$\bar{z}_s$	$\tilde{u}_s$	$\bar{u}_s$	Δ_s
10	88,8143	1,00000	539,67	1,00000	0
11	87,421	0,98431	539,52	0,99972	28
12	87,333	0,98332	539,54	0,99976	24
13	89,830	1,01144	539,70	1,00006	-6
14	91,291	1,02789	539,58	0,99983	17
15	86,76	0,97687	539,56	0,99980	20
16	82,33	0,92699	539,49	0,99967	33
17	104,38	1,17526	531,50	0,98486	1514
18	167,016	1,88051	495,18	0,91756	8944
19	117,67	1,32490	415,63	0,77016	22984

Видно, что увеличение числа секций вообще не ведет к увеличению области однородности поля. По существу, при возрастании числа секций одновременно увеличивается коэффициент пере-

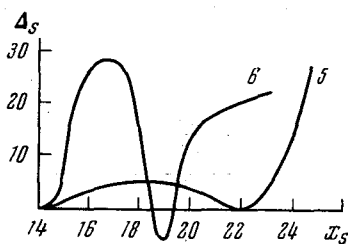


Рис. 3. Величины Δ_s для соленоидов, соответствующих табл. 5 (при $m=6$) и 6 (цифры у кривых — номера таблиц)

грузки K . Соленоид может состоять из небольшого числа секций (например, из семи; см. табл. 5 и рис. 3) и вместе с тем создавать достаточно однородное поле. Впрочем, этот вывод можно сделать уже из результатов, полученных в работе [1], так как построенный там соленоид состоит в сущности из семи секций различной длины (см. табл. 3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные выше результаты показывают, что метод решения интегральных уравнений первого рода с помощью полиномов Чебышева $P_{k,n}(s)$, предложенный в статье [2], позволяет эффективно рассчитывать соленоиды с однородным полем. Следует отметить, что постановка задачи о соленоиде с максимально однородным полем несколько отличается от той, которая была в работе [2]: теперь функция $u(x)$ задана точно (это — постоянная), но фактически мы находим такую функцию $z(y)$, которая реализует заданную функцию $u(x)$ с некоторым приближением.

Этот метод без существенных изменений может быть применен для расчета соленоида, создающего на оси произвольное поле $u(x)$, заданное в виде таблицы или в другой форме.

Следует заметить, что система (5) является плохо обусловленной лишь при больших значениях n ($n \gtrsim 15$), а при умеренных значениях n ее можно решать непосредственно и таким путем прийти к результатам, приведенным, например, в табл. 2, 4 и 5. Однако при непосредственном решении системы (5) нельзя исследовать соленоиды с большим числом секций и поэтому нельзя прийти к заключению об отсутствии у них каких-либо преимуществ. По-видимому, соленоиды с заданным переменным полем $u(x)$, как правило, должны иметь большое число секций, поэтому для них предложенный метод особенно существен.

Развитый метод представляет интерес также для расчета сверхпроводящих соленоидов. Оптимальность таких соленоидов представляется особенно существенной из-за ограниченности их размеров и веса. Отметим также, что у концов сверхпроводящего соленоида возможно довольно сильное увеличение плотности тока, так как там магнитное поле убывает, а следовательно, допустимый ток растет. Из этих соображений возможно выбирать значения K , закладываемые в расчет и определяющие выбор числа секций при заданной конфигурации поля.

Все вычисления проводились на ЭЦВМ «Минск-2» (точность счета семь знаков) по стандартной программе, составленной для решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода на основании работы [2]. Эту программу составила Н. Ф. Родина, и я выражаю ей свою благодарность.

Я благодарна П. Л. Капице за поддержку данной работы, С. П. Капице и Л. А. Вайнштейну за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Капица. Электроника больших мощностей, сб. 2. М., Изд-во АН СССР, 1963, стр. 109—118.
2. Л. П. Грабарь. Докл. АН СССР, 172, № 4, 1967.
3. Л. П. Грабарь. Таблицы полиномов Чебышева, ортонормированных на системе равноотстоящих точек. М., ВЦ АН СССР, 1965.
4. А. Рустерхольц. Электронная оптика. ИЛ, 1952, гл. III, § 5.