

Московский физико-технический институт
Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН

Критическое поведение мениска в кристаллах He^4

Дипломная работа студента 122 гр. МФТИ
Шемятихина Дмитрия Борисовича

Научный руководитель
чл.-корр. РАН К. О. Кешишев

Москва, 2007 г.

Содержание

1. Введение	1
1.1 Постановка задачи	1
2. Эксперимент	5
2.1 Экспериментальная установка	5
2.2 Ход эксперимента	7
2.3 Дифракционная картина	10
3. Результаты	15
3.1 Компьютерная обработка	15
3.2 Результаты	18
Список литературы	22

1. Введение

Экспериментальное исследование равновесных свойств поверхности подавляющего большинства веществ является практически невыполнимой задачей из-за трудности получения объекта исследования — равновесной поверхности кристалла.

Твердый гелий во многих отношениях является уникальным объектом для изучения свойств кристаллической поверхности. Благодаря ярко выраженным квантовым свойствам в гелии возможен принципиально отличный от классического механизм кристаллизации, в результате чего рост и плавление кристалла может происходить весьма быстро в строго равновесных условиях. Кроме того, при достаточно низкой температуре (ниже 1 К) теплота кристаллизации гелия практически равна нулю, а кристалл находится в равновесии со сверхтекучей жидкой фазой, что исключает проблемы с массо- и теплопереносом во время плавления или кристаллизации.

Все это приводит к тому, что кинетический коэффициент роста кристалла He^4 становится аномально большим, и кристалл за время порядка нескольких секунд принимает термодинамически равновесную форму, что недостижимо для всех без исключения прочих веществ. Чрезвычайно короткие времена релаксации формы межфазной границы, измеряемые секундами, позволяют наблюдать различного рода капиллярные явления, свойственные в обычных веществах лишь жидкостям.

1.1 Постановка задачи

Известно, что поверхностная энергия кристалла α является функцией кристаллографической ориентации θ и на атомногладких гранях имеет особенность, связанную с конечностью энергии ступени β [1]. В простейшем двумерном случае поверхностная энергия в окрестности атомноглад-

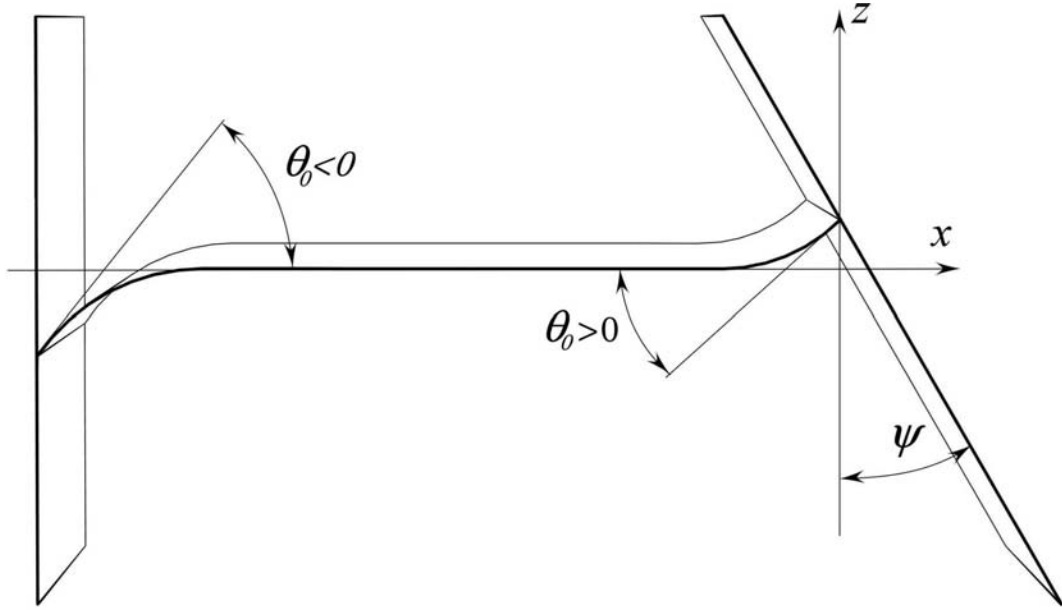


Рис. 1. Равновесная форма границы раздела кристалл-жидкость. Следует отметить, что приведенные в тексте рассуждения относятся к ситуации, когда кристалл находится слева от стенки. Легко видеть, что заменой направления оси x ситуация меняется на противоположную. По этой причине на левой стороне рисунка угол $\theta_0 < 0$.

кой грани ($\theta = 0$) с учетом взаимодействия ступеней имеет вид:

$$\alpha(\theta) = \alpha_0 \cos \theta + \frac{\beta}{h} |\sin \theta| + \frac{\gamma}{6} |\theta|^3, \quad (1)$$

где h — высота ступени, γ — константа взаимодействия между ступенями, $\theta = dZ/dx$, $Z(x)$ — форма межфазной границы.

Рассмотрим, следуя [2], кристалл с горизонтальной гранью (плоскость xy) в равновесии с жидкой фазой, ограниченный стенками контейнера (рис. 1). Форма межфазной границы соответствует минимуму поверхностной и гравитационной энергий при заданном объеме кристалла. Из-за разности ε энергий кристалл-стенка и жидкость-стенка межфазная граница в окрестности стенки искривляется, оказываясь наклоненной в точке касания на угол θ_0 . При произвольном угле наклона стенки ψ к вертикали

краевой угол $\psi - \theta_0 + \pi/2$ связан с α и ε соотношением:

$$\alpha(\theta) \sin(\psi - \theta_0) - \alpha'_\theta(\theta) \cos(\psi - \theta_0) = \varepsilon(\psi). \quad (2)$$

С учетом (1) отсюда следует:

$$\theta_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{\gamma \cos \psi} \left(\mp \varepsilon \pm \alpha_0 \sin \psi - \frac{\beta}{h} \cos \psi \right)}. \quad (3)$$

Положительное (отрицательное) решение реализуется на правом (левом) краю мениска на рис. 1.

В зависимости $\theta_0(\psi)$ есть интересная особенность, связанная с тем, что подкоренное выражение в (3) становится меньше нуля, при этом горизонтальная грань непосредственно контактирует со стенкой (рис. 2б). Это происходит в диапазоне углов наклона стенки $\psi_- < \psi < \psi_+$, границы которого определяются соотношением

$$\alpha_0 \sin \psi_\pm - \varepsilon(\psi_\pm) = \pm \frac{\beta}{h} \cos \psi_\pm. \quad (4)$$

В результате, если известна поверхностная энергия грани α_0 , а диапазон углов $\psi_+ - \psi_-$ достаточно мал, так, что можно пренебречь различием $\varepsilon(\psi_+)$ и $\varepsilon(\psi_-)$, измерение зависимости $\theta_0(\psi)$ с использованием (4) является прямым методом определения энергии ступени:

$$\beta = \alpha_0 h \operatorname{tg} \frac{\psi_+ - \psi_-}{2}. \quad (5)$$

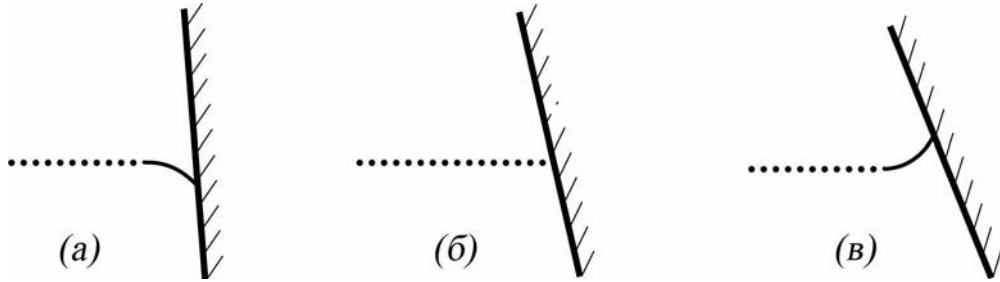


Рис. 2. Изменение профиля мениска при различных углах наклона стенки: (а) $\psi < \psi_-$, (б) $\psi_- < \psi < \psi_+$ и (в) $\psi_+ < \psi$.

В работе [2] было также показано, что в случае, когда грань горизонтальна, а θ_0 справа и слева имеет разные знаки (как на рис. 1), форма мениска при малых отклонениях от горизонтали описывается зависимостью

$$Z_{\pm} = \pm \frac{\Delta\rho g}{18\gamma} |x|^3, \quad (6)$$

где $\Delta\rho = 1,83 \cdot 10^{-2} \text{ г/см}^3$ — разница плотностей твердой и жидкой фаз, разные знаки соответствуют правой и левой сторонам мениска. Измерив профиль мениска, можно оценить коэффициент пропорциональности, а с ним и константу взаимодействия ступеней γ . Также можно независимо проверить второе утверждение, содержащееся в этой формуле: антисимметричность профиля которая сохраняется, даже при разных значениях $|\theta_0|$ справа и слева.

Цель диплома — прямыми оптическими методами измерить энергию ступени на грани (0001), а также проверить результаты работы [2], в частности, зависимость (6).

Основные результаты диплома опубликованы в работе [3], докладывались на 34-м совещании по физике низких температур (сентябрь 2006 г.) и 49-й конференции МФТИ (ноябрь 2006 г.)

2. Эксперимент

2.1 Экспериментальная установка

Работа выполнена на экспериментальной установке, в основе своей созданной ранее для изучения различных свойств кристаллического гелия [?, 6]. Наиболее существенным изменениям подверглась экспериментальная камера, в которой выращивались кристаллы He^4 .

Для получения низких температур использовался оптический криостат, снабженный стандартным рефрижератором откачки He^3 с предельной температурой 0,32 К. Внутри вакуумной рубашки рефрижератора размещена экспериментальная камера, представляющая собой горизонтально расположенный цилиндр из феррохрома (1) с внутренним диаметром 19 мм и длиной 25,6 мм. В торцы камеры с помощью разборного индиевого уплотнения вмонтированы оптические плоскопараллельные окна (3) толщиной 3 мм. Медное плоское полированное дно камеры (4) находится в тепловом контакте с рефрижератором посредством гибкого медного холодопровода (6), к которому припаян угольный термометр (8), представляющий собой диск, вырезанный из радиосопротивления Allen-Bredley. В отверстие в верхней части камеры тонкий капилляр (9), служащий для заполнения камеры рабочим веществом. Внутри камеры в верхней ее части расположен конденсатор (10), представляющий собой диэлектрический цилиндр $\varnothing 0,8$ мм, на который бифилярно в один слой намотаны два провода $\varnothing 30$ мкм в капроновой изоляции. При включении напряжения между проводами ~ 1 кВ напряженность поля между соседними витками составляет величину $\sim 10^6$ В/см.

К внутренней поверхности камеры приклеены эпоксидным клеем STYCAST-1266 два стеклянных цилиндрических тела (5) с образующими, параллельными оси камеры, основания которых примыкают к переднему и заднему окнам камеры и имеют форму, показанную на рис. 3, внизу. Поверхности тел, обращенные внутрь камеры, оптически полированы и тщательно вымыты для обеспечения однородных условий смачивания.

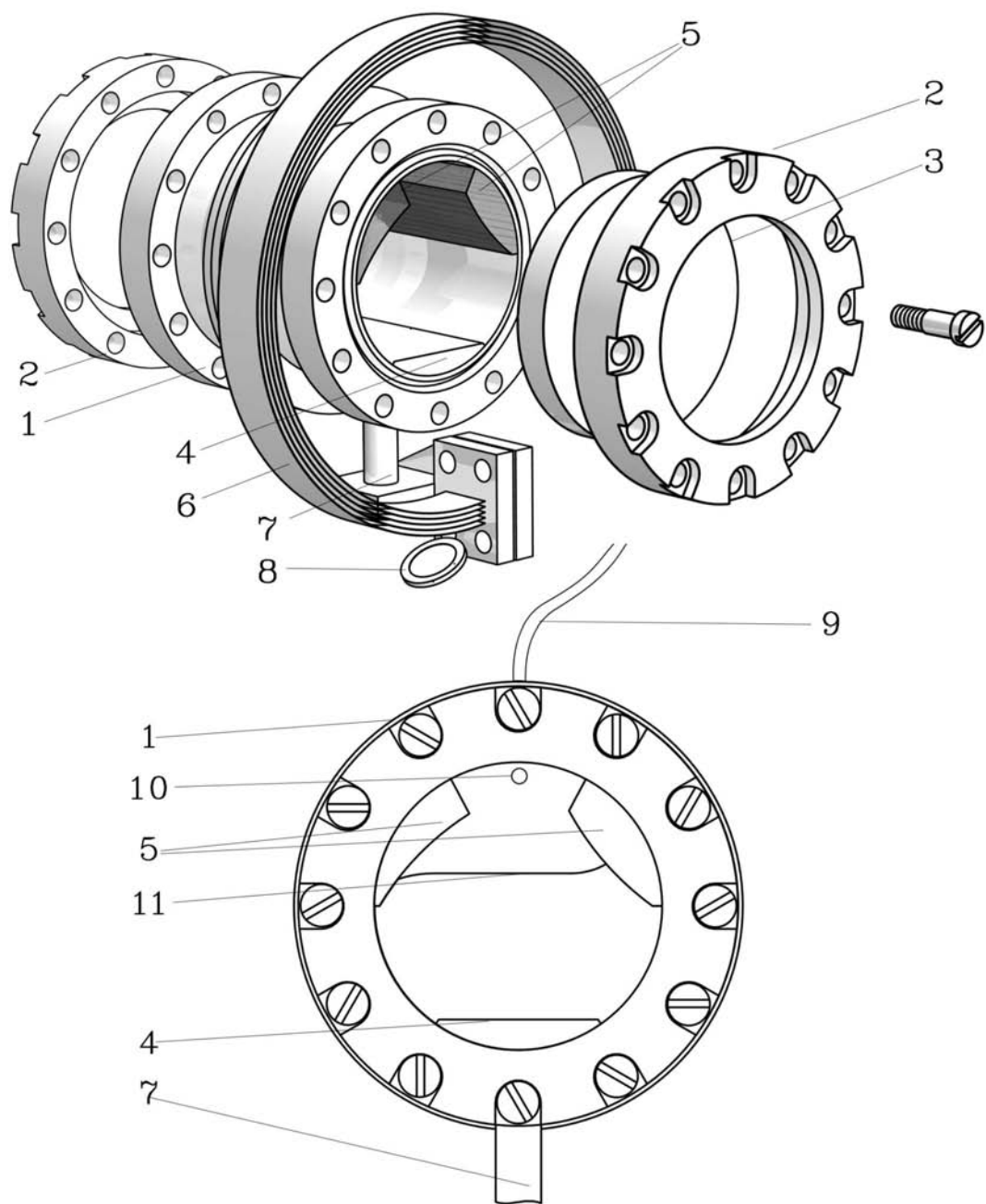


Рис. 3. Экспериментальная камера. 1 — корпус, 2 — фланец, 3 — окно, 4 — медное дно, 5 — стеклянные стенки, 6 — гибкий медный холодопровод, 7 — медный холодопровод, 8 — угольный термометр, 9 — капилляр, 10 — конденсатор, 11 — поверхность раздела жидкой и твердой фаз.

Конфигурация стеклянных стенок выбрана таким образом, что с увеличением высоты угол ψ изменяется для левой стенки от 30° до 57° , а для правой — от 55° до 29° .

2.2 Ход эксперимента

После охлаждения рефрижератора до температуры $0,9\text{ К}$ камера заполнялась жидким He^4 , и давление с помощью газификатора [7] поднималось до величины $25,3\text{ бар}$ при включенном напряжении на конденсаторе. Электрическое поле инициировало возникновение твердой фазы на поверхности конденсатора, и растущий кристалл имел форму тонкой ограниченной пластинки, перпендикулярной оси C_6 кристалла. Достигнув размеров $\sim 5\text{ мм}$ зародыш под действием силы тяжести отрывался от конденсатора и, планируя, падал на горизонтальное дно, при этом грань (0001) с большой вероятностью оказывалась горизонтальной [5]. Качество образца контролировалось визуально. Фотография зародыша в момент отделения от конденсатора представлена на рис. 4.

Отклонение грани (0001) от горизонтали определялось оптическим методом в процессе медленного роста кристалла, когда его поверхность почти полностью представлена гранью (0001) . Угол отклонения грани от горизонтали в плоскости, перпендикулярной оптической оси, определялся с помощью телескопической трубы, снабженной гониометром, который предварительно был выставлен по мениску жидкого гелия в процессе заполнения камеры. Погрешность измерения составляла около $\pm 5'$ ($1,5 \cdot 10^{-3}$ рад). Угол отклонения в перпендикулярном направлении измерялся по отражению от плоскости (0001) падающего под скользящим углом лазерного луча. Для этого вдоль оптической оси криостата направлялся луч He-Ne лазера, который частично проходил над поверхностью кристалла, частично отражался от нее. С помощью телескопа определялся угол между лучом, отраженным от грани (0001) , и лучом, прошедшим над кристаллом и отразившимся от ориентированной строго горизонтально стеклянной пластинки, расположенной вне криостата. Погрешность опре-

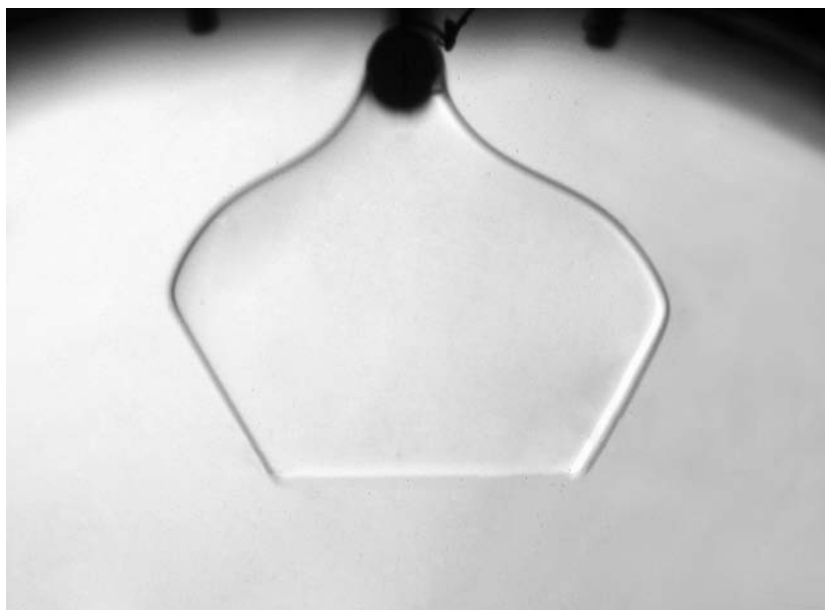


Рис. 4. Фотография висящего на конденсаторе зародыша кристалла He^4 непосредственно перед падением. Зародыш имеет форму тонкой ограненной пластинки

деления угла таким методом составляла $3 \cdot 10^{-4}$ рад. Образец признавался удачным, если отклонение грани от горизонтали не превышало $0,5-1^\circ$.

После получения затравочного кристалла и определения ориентации оси C_6 , образец дорастивался до стеклянных стенок при температуре ~ 1 К. Несмотря на то, что при этой температуре плоскость (0001) огранена, что существенно осложняет и замедляет рост, выращенные достаточно медленно при этой температуре и охлажденные затем до рабочей температуры (0,7–0,8 К) кристаллы не имели видимых глазом дефектов.

В ходе измерений образец освещался параллельным светом (расходимость пучка $\sim 10^{-4}$ рад), сформированным источником «холодного» света видимого диапазона KL1500 и системой линз. Форма мениска фиксировалась цифровым фотоаппаратом Canon 350D с объективом EF-180 мм, который фокусировался на среднее сечение камеры zx . Поскольку продольный размер кристалла (25,6 мм) значительно превышает капиллярную постоянную (~ 1 мм), искривлением поверхности вблизи окон можно пренебречь

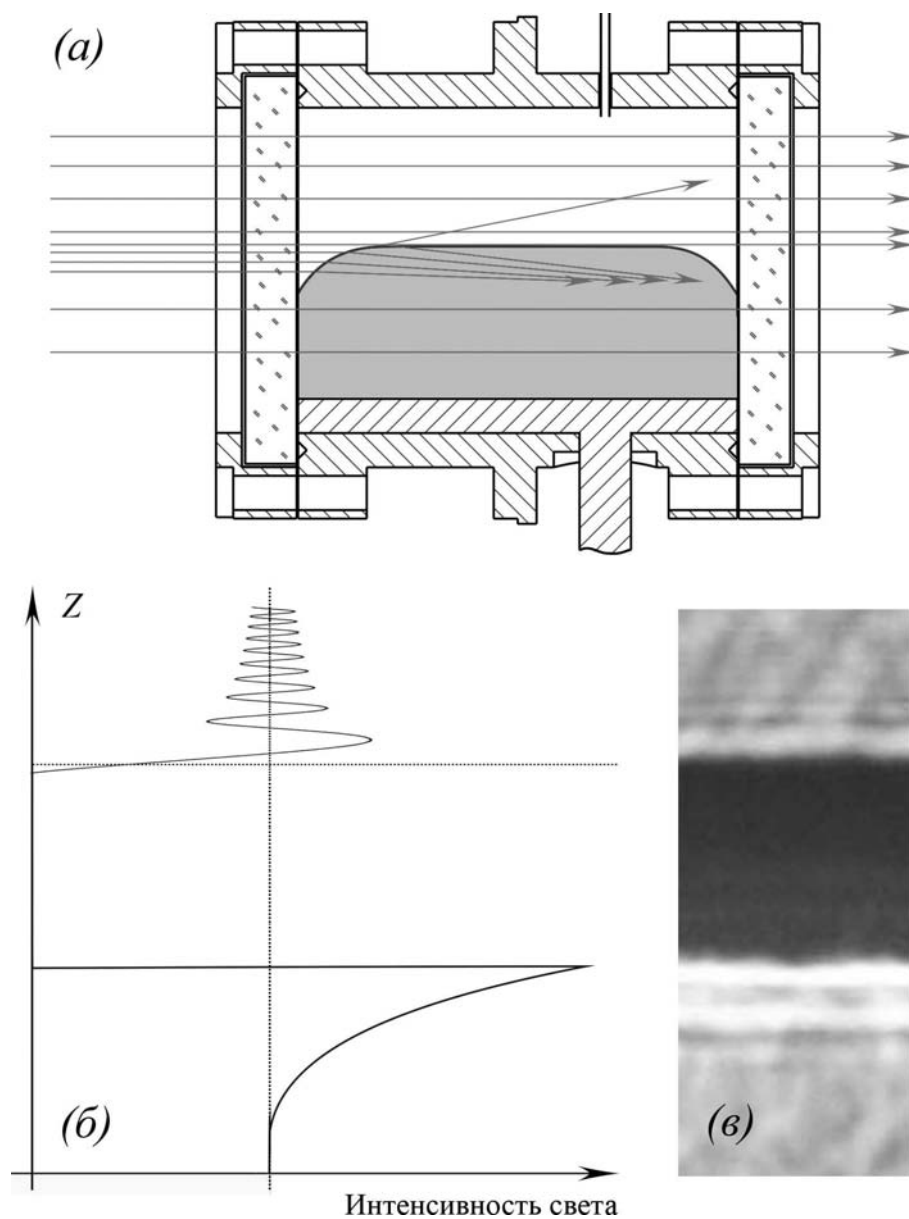


Рис. 5. (а) Оптическая схема установки. Показан продольный разрез камеры. Параллельный свет, попав на мениск, отражается и преломляется на нем. (б) Перераспределение света в результате преломления, отражения и дифракции. (в) Фрагмент экспериментальной фотографии мениска.

и считать задачу в плоскости zx двумерной. Проходя над поверхностью кристалла, часть пучка света, попавшая на искривленный вблизи входного окна участок поверхности, преломляется, образуя отклоненный вниз сходящийся пучок. Также свет частично отражается от этой поверхности вверх, но этот эффект, как показали численные расчеты, не превышает одного процента (см. рис. 5). Все это приводит к перераспределению света на фотографии: сразу под поверхностью мениска видны темная, а под ней светлая полосы.

Кроме того на фотографиях на краях параллельных исходному пучку поверхностей кристалла и цилиндрических стеклянных стенок видна дифракционная картина с характерным масштабом $\sim 0,1$ мм. Для точного определения положения мениска необходимо было ее «расшифровать», то есть с максимальной точностью определить положение геометрической тени.

2.3 Дифракционная картина

Известно, что дифракция в параллельном свете длиной волны λ на тонком плоском экране на расстоянии b от него в точке с координатой x описывается интегралами Френеля [8]:

$$I = \frac{I_0}{2} ((\xi + 0,5)^2 + (\eta + 0,5)^2)$$

$$\xi = \int_0^\nu \cos \frac{\pi u^2}{2} du, \quad \eta = \int_0^\nu \sin \frac{\pi u^2}{2} du, \quad \nu = x \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}.$$

Яркость I , соответствующая геометрической тени, равна четверти средней яркости источника I_0 (рис. 6). В действительности ситуация гораздо сложнее. Для ее описания была использована модель, в которой дифракция происходит на экране, имеющем значительную протяженность в направлении x , плоскость xu которого зеркальна. Численные расчеты в этом случае представлены на рис. 6. Предположение о зеркальности поверхности гелия разумно, т. к. согласно формулам Френеля [8], даже несмотря на ма-

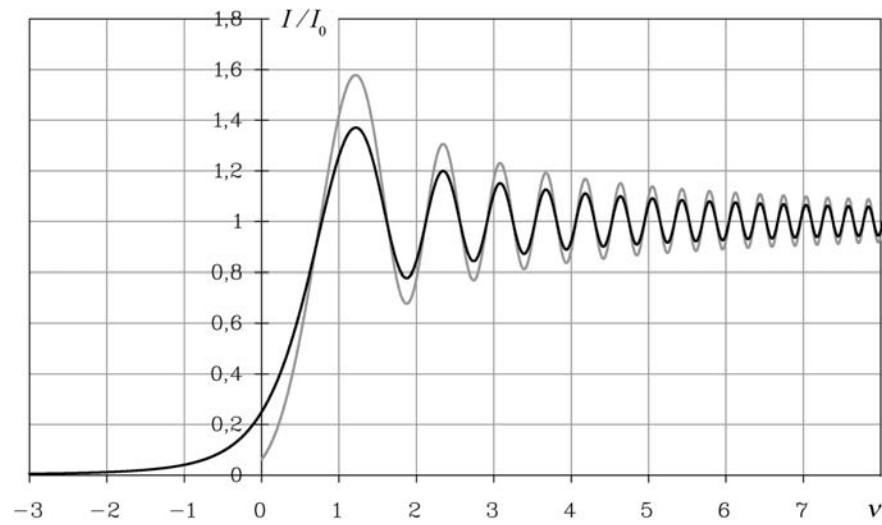


Рис. 6. Расчетная интенсивность дифракционной картины в параллельном свете для тонкого плоского экрана (темная линия) и для зеркального протяженного объекта (светлая линия).

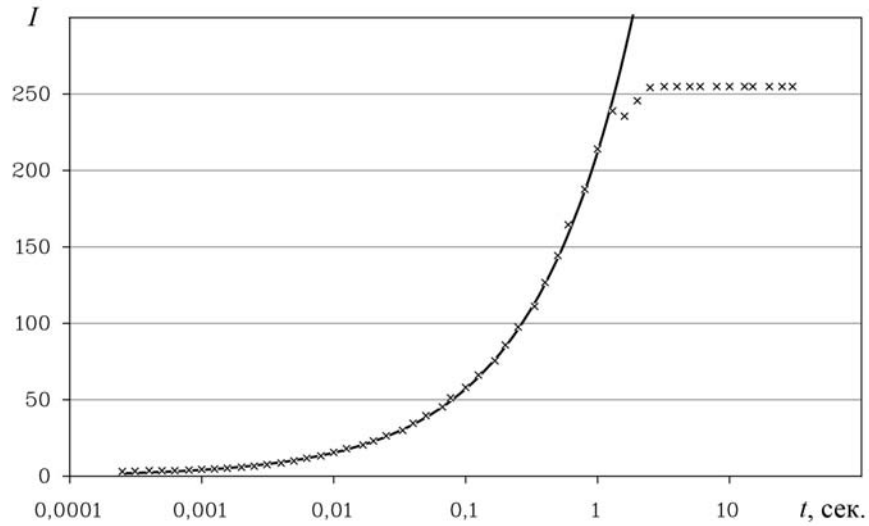


Рис. 7. Аппаратная функция матрицы фотоаппарата. Зависимость сигнала матрицы от выдержки при постоянной интенсивности источника света в произвольных единицах. Сплошной линии соответствует зависимость $I \sim t^{0,57}$. Сигнал с матрицы находится в диапазоне от 0 до 255.

лую разницу в коэффициентах преломления при углах падения, близких к 90° , коэффициент отражения от поверхности раздела жидкой и твердой фаз гелия практически равен единице.

На рис. 8а темной линией изображена экспериментально полученная дифракционная картина. Качественно она совпадает с расчетной, но яркость изображения в геометрической тени оказалось равно $0,41I_0$, вместо 0,25. Для выяснения причин этого несоответствия была получена аппаратная функция матрицы фотоаппарата, которая оказалась существенно нелинейной (см. рис. 7). Она была получена из серии фотографий одного и того же источника света при разных выдержках t . Эта зависимость с хорошей точностью описывается функцией $I \sim t^{0,57}$.

В эксперименте ситуация усложняется наличием на кристалле мениска у окон камеры. Для исследования дифракционной картины от сложного предмета, создаваемой на матрице фотоаппарата, были сфотографированы и обработаны дифракционные картины в параллельном свете от специально приготовленной стеклянной пластинки длиной 29 мм со скругленными краями. Сравнение результатов измерения с расчетными кривыми представлено на рис. 8б. Видно, что на дифракцию на протяженном объекте большое влияние оказывает положение фокуса фотоаппарата. В этом случае картина хорошо описывается моделью с двумя лезвиями, расположенными на краях предмета. Одно из лезвий формирует дифракционную картину, а второе, находящееся на расстоянии меньше фокусного, дает изображение.

Полученные данные позволяют с точностью 10 мкм определить положение геометрической тени при наличии дифракционной картины, что представляется достаточным для обработки экспериментальных фотографий мениска.

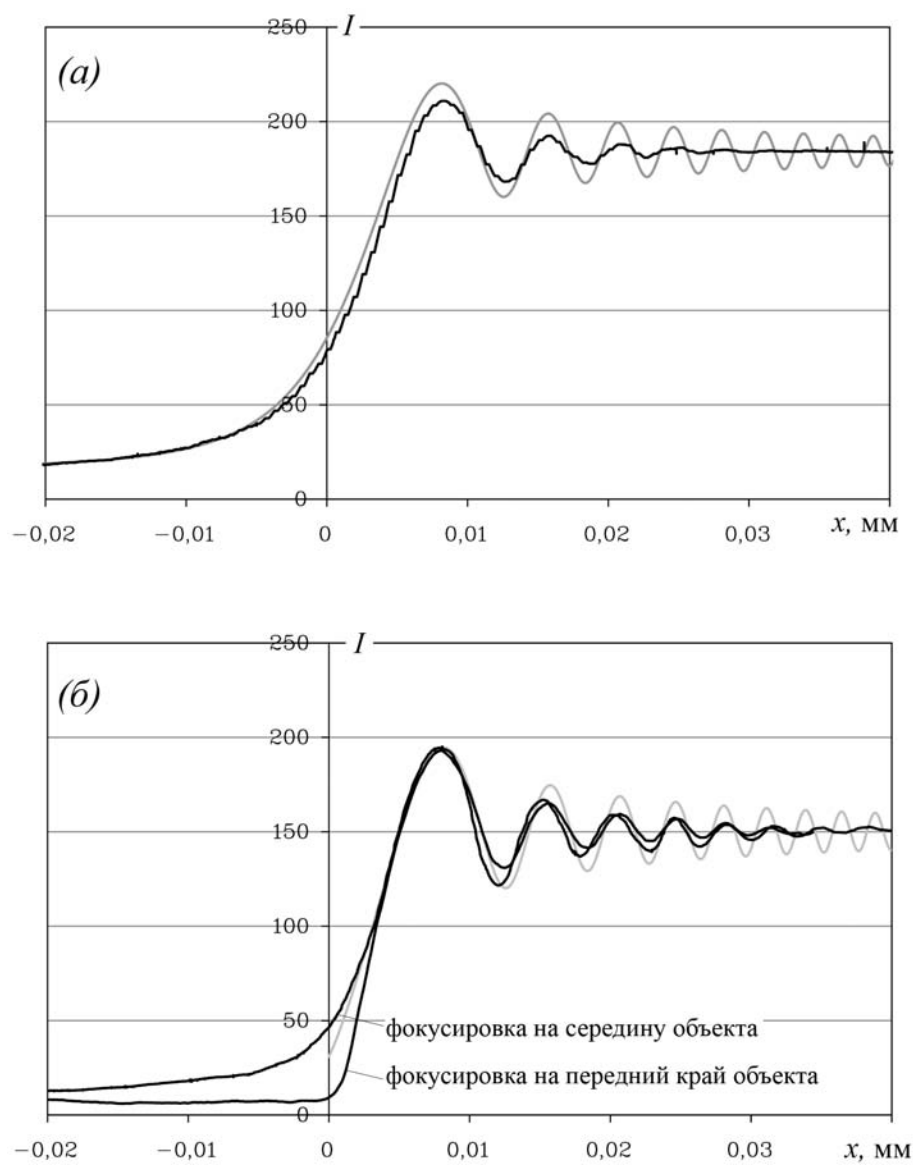


Рис. 8. Сравнение расчетной интенсивности дифракционной картины в параллельном свете (светлая линия) с полученной экспериментально с учетом аппаратной функции матрицы фотоаппарата для (а) лезвия бритвы и (б) стеклянной пластины длиной 29 мм. По оси ординат отложен сигнал с матрицы фотоаппарата.

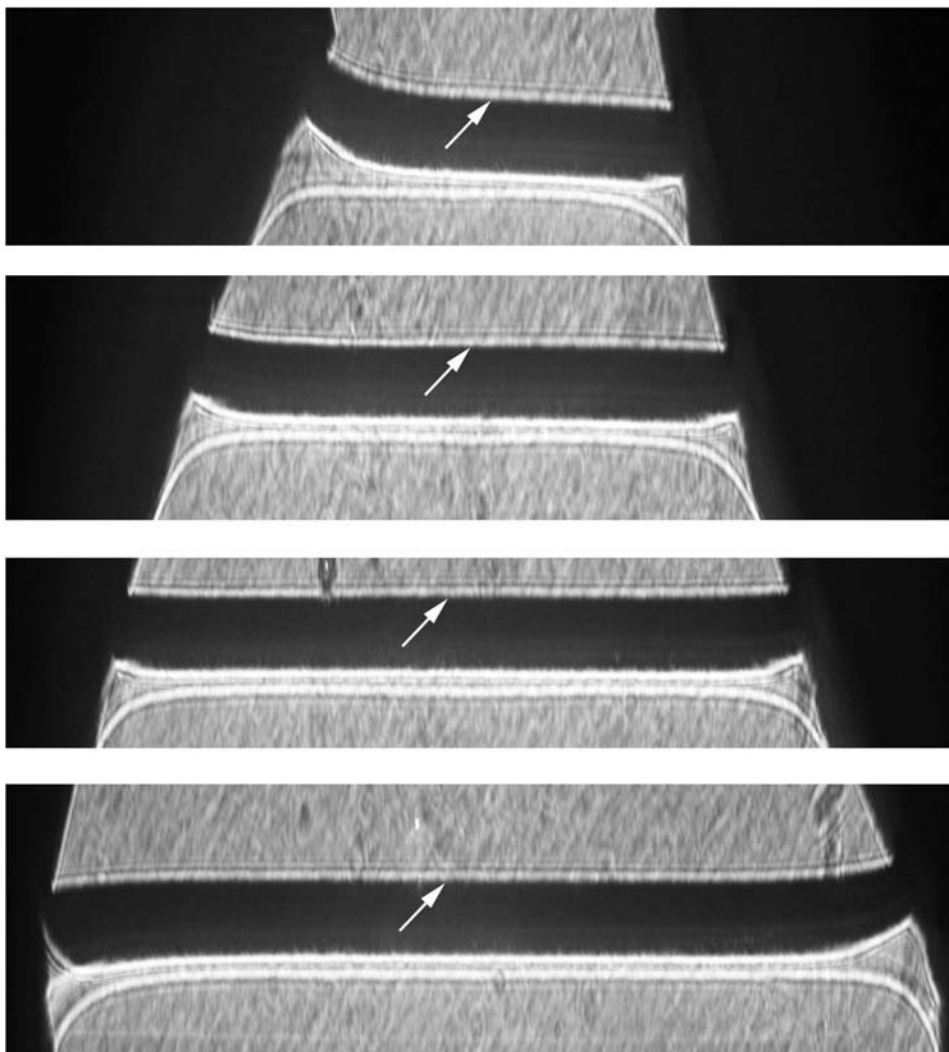


Рис. 9. Фрагменты полученных фотографий, масштаб по вертикали увеличен в 3 раза. Стрелками показано положение границы раздела жидкой и твердой фаз He^4 .

3. Результаты

На рис. 9 представлены фрагменты фотографий профиля мениска для кристаллов разной высоты. Кристалл заполняет нижнюю часть камеры, стрелкой показано положение поверхности раздела жидкой и твердой фаз. По бокам видны черные (матированные с торцов) стеклянные стенки камеры. Видно, что краевой угол зависит от угла наклона стенки. Для количественной оценки этой зависимости была разработана компьютерная программа, которая позволяла по цифровой фотографии мениска определить с учетом дифракционной картины его профиль, а также найти угол наклона стенки ψ и угол наклона поверхности θ_0 в точке их пересечения.

3.1 Компьютерная обработка

Компьютерная программа полностью автоматически обрабатывала полученные цифровые фотографии. Задача существенно упростилась благодаря известной геометрии камеры. При обработке фотографий широко использовались процедуры, описанные в книге [9].

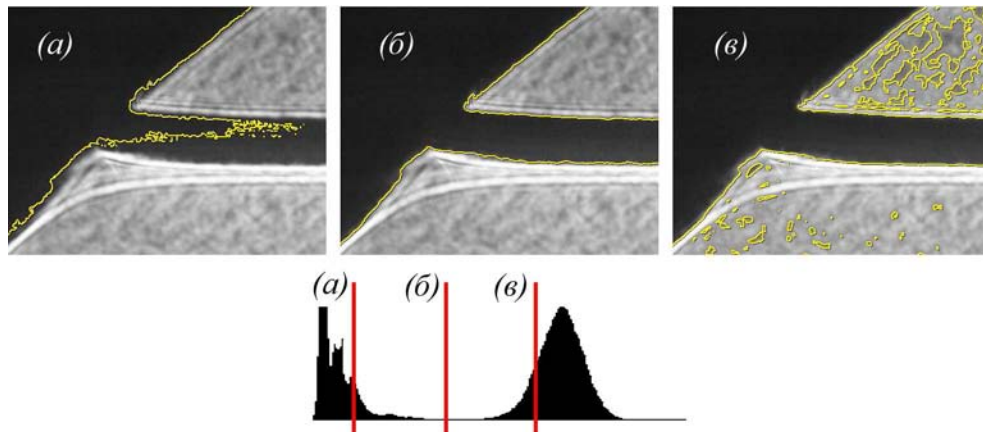


Рис. 10. Границы яркой и темной областей для трех разных значений пороговой яркости, отмеченных на гистограмме изображения снизу.

Для определения границы изображенных объектов фотография делилась на светлую и темную области. Пороговое значение яркости выбиралось из гистограммы яркости, этот процесс легко контролировался визуально, на рис. 10 желтым контуром обозначены границы этих областей для трех разных пороговых значений.

Геометрия камеры была известна, и нужна была лишь изначальная привязка. В рабочем режиме, когда граница раздела контактирует со стеклянными стенками, в нижнем полуокружье ничего нет, и это позволяет выбрать более-менее произвольно три точки на границе, через которые будет проходить нулевое приближение окружности корпуса (см. рис. 11). Используя ее, можно провести расчетные дуги стеклянных стенок и линию дна.

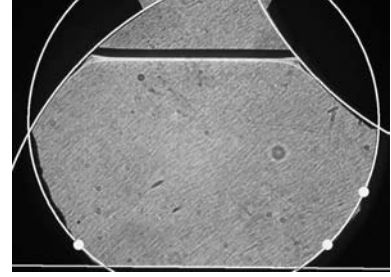


Рис. 11. Расчетная геометрия.

Затем на границах определялись «гладкие» участки, то есть такие, где средний радиус кривизны не слишком мал. После этой процедуры граница выглядит примерно так, как показано на рис. 12. Следующим этапом была привязка «гладких» отрезков границы к объектам на фотографии: к стенкам камеры, стеклянным стенкам, дну, мениску. Каждый из отрезков границы проверялся на соответствие одной из этих линий, при этом упор делался на совпадение направлений линий, а не координат.

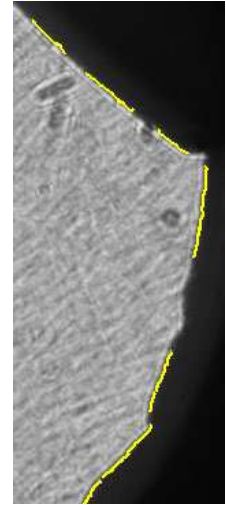


Рис. 12. Отмечены «гладкие» участки границы.

По полученным точкам (x_i, y_i) отрезков границ, принадлежащих дугам боковых стенок, проводилась оптимальная окружность с центром (x_c, y_c) и радиусом R , минимизируя следующий функционал (N — количество точек):

$$\left| NR^2 - \sum_{i=1}^N (x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 \right|.$$

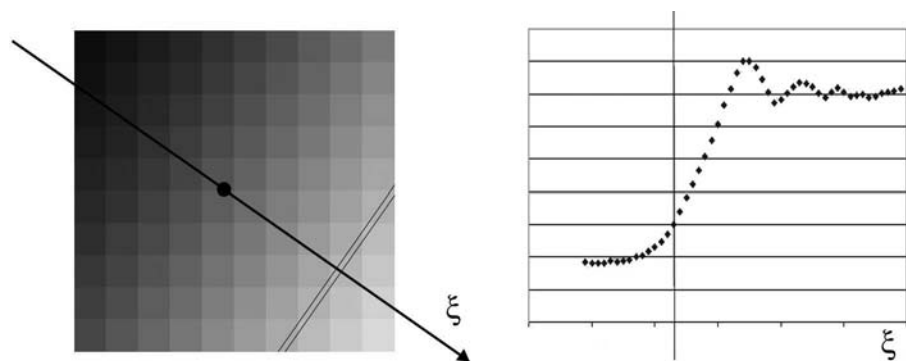


Рис. 13. Работа алгоритма обработки дифракции. Слева схематично изображен увеличенный фрагмент фотографии. Интегрирование ведется вдоль полосы с нормировкой на ее площадь. Результат интегрирования приведен на графике справа.

Следующим приближением учитывалась дифракционная картина. На рис. 13 схематично показано, каким образом усреднялась дифракционная картина. При движении вдоль выбранного направления (ξ на рис. 13), которое определялось предыдущим приближением, усреднялась яркость изображения в перпендикулярной полосе. Полученная зависимость средней яркости от ξ анализировалась, и вычислялось положение геометрической тени с учетом всего сказанного ранее. По полученным точкам проводились новые окружности.

Мениск обрабатывался похожим способом. В качестве направления, вдоль которого строилась дифракционная картина, принимался перпендикуляр к сглаженной границе между яркой и темной областью фотографии. Полученный набор точек сглаживался, чтобы уменьшить шум, вызванный наличием грязи на изображении, а затем загнутые края мениска экстраполировались методом наименьших квадратов полиномом 4-й степени до пересечения с окружностью стенки. Степень полинома была выбрана эмпирически, точность экстраполяции оценивалась визуально. Полиномы больших степеней начинали следовать неровностям, связанным с грязью на изображении.

3.2 Результаты

Экспериментальная установка устроена таким образом, что на экспериментальный объем приходится смотреть через слой сверхтекучего He^4 в наружном криостате. Это приводит к тому, что на гелиевые окна выседают большое количество твердых частиц, которые при освещении параллельным светом дают большое количество дефектов на изображении («рябь» на рис.9). С этим связана основная погрешность измерений.

Результаты компьютерной обработки представлены на рис. 14, где показана зависимость $\theta_0(\psi)$ при температуре 0,75 К для кристалла, ось C_6 которого отклонена от вертикали на 10^{-2} рад. Серия получена в процессе плавления кристалла. Различные символы соответствуют левому и правому краю мениска. По причине невысокой точности эти данные следует рассматривать как предварительные. Тем не менее, можно констатировать, что угол θ_0 монотонно возрастает по мере увеличения угла ψ от 43° до $\sim 57^\circ$. Та же тенденция наблюдается в интервале $\sim 31^\circ < \psi < 34^\circ$.

Непосредственный выход грани (0001) на стенку реализуется в диапазоне $34^\circ \pm 2^\circ < \psi < 43^\circ \pm 2^\circ$.

Используя формулу (5) с известными данными для $h = 2,99 \text{ \AA}$ и $\alpha_0 = 0,172 \text{ эрг/см}^2$ [10], получаем значение энергии ступени для грани (0001) $\beta/h = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ эрг/см}^2$. Эта величина хорошо согласуется с более ранними данными [11], полученными с помощью измерения спектра кристаллизационных волн.

Конфигурация стекол подобрана таким образом, что практически для любого уровня кристалла θ_0 справа и слева имеет разные знаки (как на рис. 1), либо грань непосредственно касается стенки камеры. В таком случае профиль мениска должен быть антисимметричным, согласно формуле (6). Как видно из рис. 15, где представлен оцифрованный профиль мениска для такого случая, с той точностью, которой мы располагаем, это выполняется. Общий наклон соответствует отклонению плоскости (0001) вращенного образца от горизонтали.

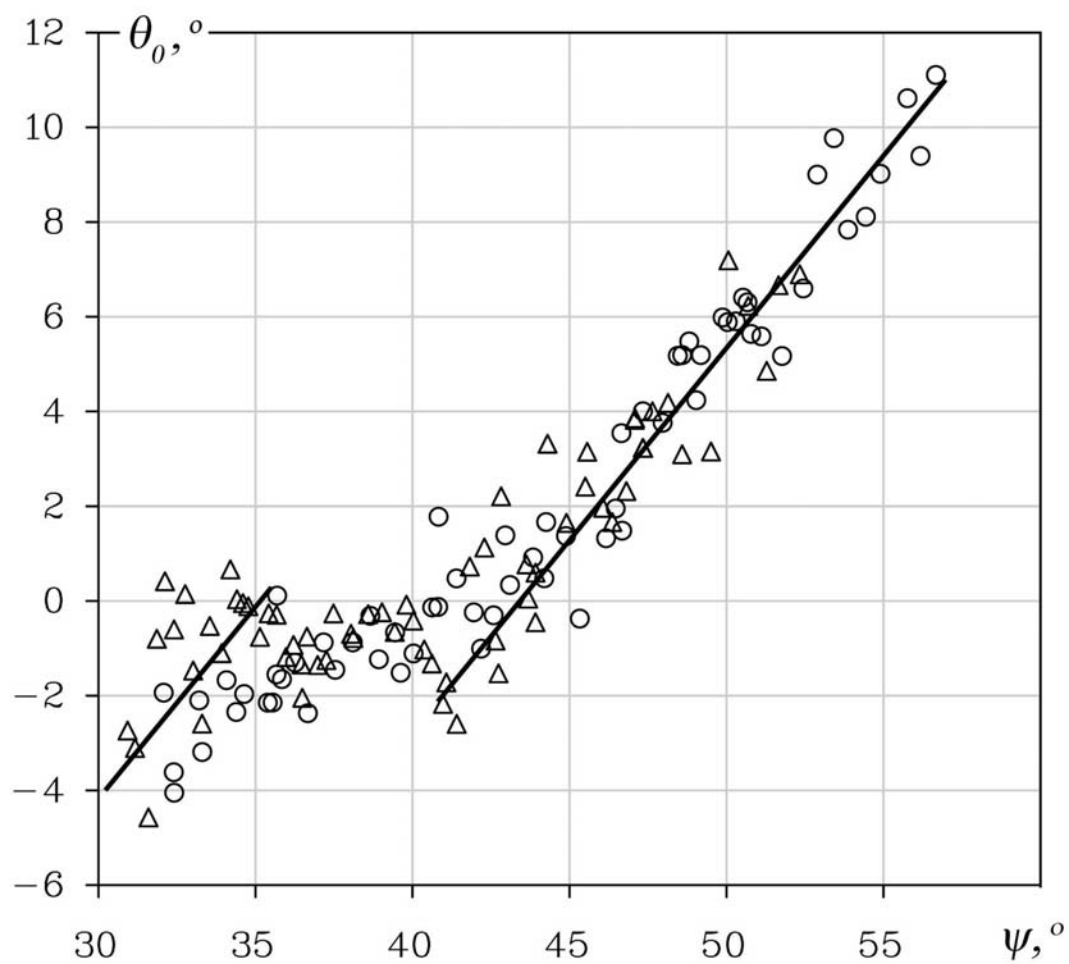


Рис. 14. Зависимость $\theta_0(\psi)$. Круглыми (треугольными) символами обозначены результаты измерений на левой (правой) стороне мениска.

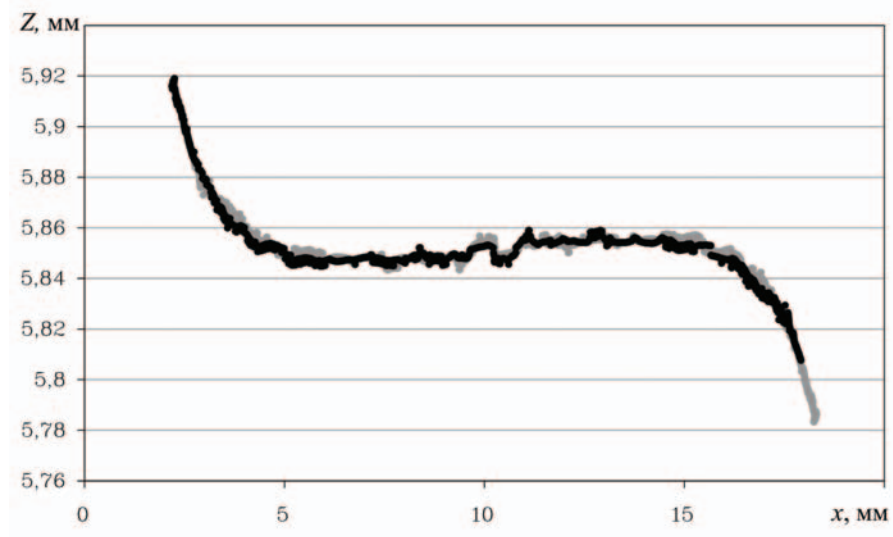


Рис. 15. Профиль мениска. Показано наличие антисимметрии правой и левой стороны.

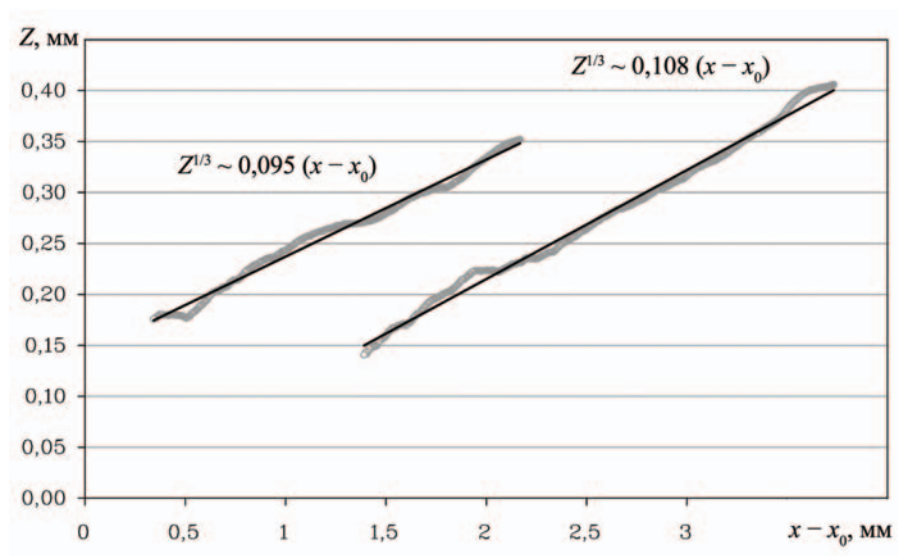


Рис. 16. Зависимость $Z^{1/3}$ от $(x - x_0)$ для двух разных углов наклона стенки.

С полученной точностью профили мениска удовлетворяют закону $Z \sim |x|^3$, как видно на рис. 16, где изображены два профиля для разных углов наклона стенки при одной температуре. Оценив коэффициент пропорциональности, можно с помощью формулы (6) определить константу взаимодействия ступеней γ , которая оказалась равна 10 эрг/см^2 . К сожалению, далеко не для всех уровней кристалла удалось увидеть эту зависимость. В большинстве случаев мениск был слишком мал.

Точность наших измерений можно существенно повысить, усовершенствовав оптический тракт криостата и тем самым повысив качество изображения. Необходимо в первую очередь избавиться от гелия на пути света.

Следует также несколько скорректировать конфигурацию стеклянных стенок, чтобы интервал $\psi_- < \psi < \psi_+$ был расположен в середине диапазона углов наклона стенки.

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю К. О. Кешишеву за повседневное внимание и неоценимый вклад в данную дипломную работу, В. И. Марченко, Е. Р. Подоляку и А. Я. Паршину за многочисленные полезные обсуждения и советы.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, О равновесной форме кристаллов. — Собрание трудов, т.2. — М., Наука, 1969, с. 119–125.
- [2] В. И. Марченко, А. Я. Паршин, Письма в ЖЭТФ, **83**, с. 485–486 (2006).
- [3] К. О. Кешишев, В. Н. Сорокин, Д. Б. Шемятихин, Письма в ЖЭТФ, **85**, с. 213–215 (2007).
- [4] А. И. Шальников, ЖЭТФ, **47**, с. 1727–1732.
- [5] К. О. Кешишев, А. Я. Паршин, А. В. Бабкин, ЖЭТФ, **80**, с. 716–728 (1981).
- [6] К. О. Keshishev, О. А. Andreeva, 1991, in *Excitations in Two-Dimensional and Three-Dimensional Quantum Fluids*, edited by A. F. G. Wyatt and H. J. Lauter (Plenum press, New York).
- [7] В. К. Ткаченко, А. И. Филимонов, ПТЭ, **5**, 203 (1961)
- [8] Ланцберг.
- [9] I. Press, H. William, Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. — Cambridge University Press, New York, 1988.
- [10] О. А. Andreeva, К. О. Keshishev, Phys. Scr. **39**, 352 (1991).
- [11] E. Rolley, S. Balibar, C. Guthmann, P. Nozieres, 1995, Physica B **210**, 397.